LOGICA INTENSIONALE

S. Galvan

(Università Cattolica Milano)

PREREQUISITI

CALCOLO k DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE CON IDENTITA'

$$\mathbf{L}(\mathbf{k}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{k}),\mathbf{F}(\mathbf{k}) \rangle$$

$$\mathbf{k} = \langle \mathbf{L}(\mathbf{k}),\mathbf{D}(\mathbf{k}) \rangle$$

Regole non operazionali di **k**

Regola di assunzione A

$X \vdash \alpha$ (se $\alpha \in X$)	$\dfrac{\alpha}{\alpha}$

Regole operazionali di k

3. Regola di introduzione della congiunzione nel conseguente $I\wedge$

$$\frac{\begin{array}{c} X \vdash \alpha \\ Y \vdash \beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \alpha \wedge \beta}$$	$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

4. Regola di eliminazione della congiunzione nel conseguente $E\wedge$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha / \beta}$$	$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha \ / \ \beta}$$

5. Regola di introduzione della disgiunzione nel conseguente I$\vee$

$\dfrac{X \vdash \alpha}{X \vdash \alpha \vee \beta \,/\, \beta \vee \alpha}$	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta \,/\, \beta \vee \alpha}$

6. Regola di introduzione della disgiunzione nell'antecedente $\vee$I

$\dfrac{\begin{array}{c} X \;\; \alpha \vdash \gamma \\ Y \;\; \beta \vdash \gamma \end{array}}{X \cup Y \;\; \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$	$\dfrac{\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}$

7. Regola di introduzione dell'implicazione nel conseguente I$\rightarrow$

$\dfrac{X \;\; \alpha \vdash \beta}{X \;\; \vdash \alpha \rightarrow \beta}$	$\dfrac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ . \\ . \\ . \\ \beta \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}$

8. Regola del *modus ponens* MP

$$\frac{\begin{array}{c} X \vdash \alpha \\ Y \vdash \alpha \to \beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \beta}$$	$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \to \beta \end{array}}{\beta}$$

9. Regola della negazione classica ($\neg$k)

$$\frac{\begin{array}{c} X\ \neg\alpha \vdash \beta \\ Y\ \neg\alpha \vdash \neg\beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \alpha}$$	$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\alpha] \\ . \\ . \\ \perp \end{array}}{\alpha}$$

Regole derivabili di k

1. Regola del rafforzamento delle premesse RP

$$\frac{X \;\vdash \beta}{X \;\alpha \;\vdash \beta}$$

2. Regola della concatenazione KS

$$\frac{\begin{array}{c} X \;\vdash \alpha \\ Y \;\alpha \vdash \beta \end{array}}{X \cup Y \;\vdash \beta}$$

3. Regola intuizionistica della negazione (¬i)

$$\frac{\begin{array}{c} X \vdash \alpha \\ Y \vdash \neg\alpha \end{array}}{X \cup Y \;\vdash \beta}$$

4. Regola minimale della negazione (¬j)

$$\frac{\begin{array}{c} X \;\alpha \vdash \beta \\ Y \;\alpha \vdash \neg\beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \neg\alpha}$$

5. Regole della doppia negazione (DN)

a) $$\frac{X \vdash \neg\neg\alpha}{X \vdash \alpha}$$

b) $$\frac{X \vdash \alpha}{X \vdash \neg\neg\alpha}$$

6. Regola di autofondazione AF

$$\frac{X\ \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha}$$

7. Regola di autocontraddizione AC

$$\frac{X\ \alpha \vdash \neg\alpha}{X \vdash \neg\alpha}$$

8. Regole di contrapposizione C

a) $$\frac{X\ \alpha \vdash \beta}{X\ \neg\beta \vdash \neg\alpha}$$

b) $$\frac{X\ \alpha \vdash \neg\beta}{X\ \beta \vdash \neg\alpha}$$

c) $$\frac{X\ \neg\alpha \vdash \beta}{X\ \neg\beta \vdash \alpha}$$

d) $$\frac{X\ \neg\alpha \vdash \neg\beta}{X\ \beta \vdash \alpha}$$

9. Paradossi dell'implicazione PI

a) $\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ b) $\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

10. Regola di esaustione **E**

$$\frac{\begin{array}{c} X\ \alpha \vdash \beta \\ Y\ \neg\alpha \vdash \beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \beta}$$

11. Regola di eliminazione dell'implicatore E→

$$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X\ \alpha \vdash \beta}$$

12. Regola di introduzione dell'implicatore nell'antecedente →I

$$\frac{\begin{array}{c} X\ \alpha \vdash \gamma \\ Y\ \neg\beta \vdash \gamma \end{array}}{X \cup Y\ \alpha \rightarrow \beta \vdash \gamma}$$

Derivazione (in **C**):

$\alpha\,\alpha\to\beta \vdash \beta$	**A** (bis), **MP**
$Y\ \beta \vdash \gamma$	H
$Y\ \alpha\,\alpha\to\beta \vdash \gamma$	**KS**
$X\ \neg\alpha \vdash \gamma$	H
$X\cup Y\ \alpha\to\beta \vdash \gamma$	**E**

13. Regola di introduzione del doppio implicatore I↔

$$\frac{\begin{array}{c} X \vdash \alpha\to\beta \\ Y \vdash \beta\to\alpha \end{array}}{X\cup Y \vdash \alpha\leftrightarrow\beta}$$

14. Regola di eliminazione del doppio implicatore E↔

$$\frac{X \vdash \alpha\leftrightarrow\beta}{X \vdash \alpha\to\beta \,/\, \beta\to\alpha}$$

15. Regole di trasformazione dei connettivi TrC (alcune esemplificazioni)

a) $\alpha\to\beta \vdash \neg(\alpha\wedge\neg\beta)$

b) $\neg(\alpha\wedge\neg\beta) \vdash \alpha\to\beta$

c) $\alpha\to\beta \vdash \neg\alpha\vee\beta$

d) $\neg\alpha\vee\beta \vdash \alpha\to\beta$

LOGICA MODALE

1. Sintassi della logica modale

1.1 Calcoli modali normali

$$\mathbf{L(m)} = <\mathbf{A(m)},\mathbf{F(m)}>.$$

A(**m**) = **A**(**k**) + $\Box$.

F(**m**) = **F**(**k**) + la regola: se α è una formula allora anche $\Box\alpha$ è una formula.

$$\Diamond\alpha =_{def} \neg\Box\neg\alpha$$

$$\mathbf{m} = <\mathbf{L(m)},\mathbf{D(m)}>$$

D(**m**) = **D**(**k**) + le regole tipiche dei calcoli modali.

a) Regola di necessitazione **N**

$$\frac{X \vdash \alpha}{\Box X \vdash \Box\alpha}$$

(ove con $\Box X$ si indica l'insieme di tutte le necessitazioni delle formule appartenenti a X)

b) Assiomi:

D: $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$

T: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

4: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

5: $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

Sistemi di logica modale:

K con **D**(**K**) = **D**(**k**) + **N**

KD con **D**(**KD**) = **D**(**K**) + **D**

KT con **D**(**KT**) = **D**(**K**) + **T**

(designato anche con **T**)

K4 con **D**(**K4**) = **D**(**K**) + **4**

K5 con **D**(**K5**) = **D**(**K**) + **5**

K45 con **D**(**K45**) = **D**(**K4**) + **5**

KT4 con **D**(**KT4**) = **D**(**KT**) + **4**

(designato anche con **S4**)

KT5 con **D**(**KT5**) = **D**(**KT**) + **5**

(designato anche con **S5**)

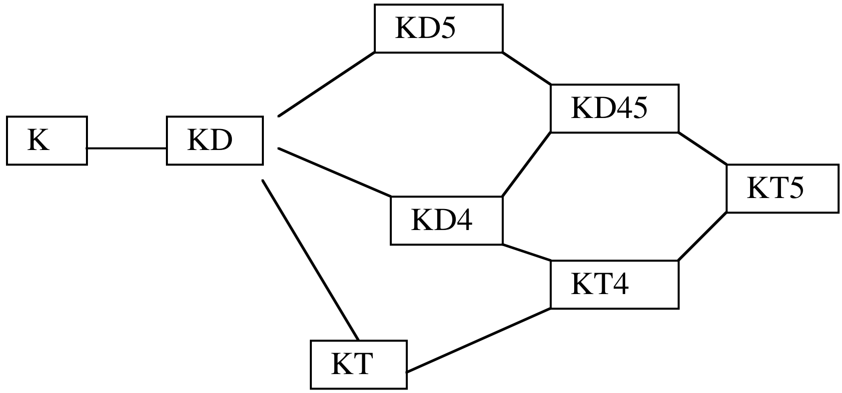
KD4 con **D**(**KD4**) = **D**(**KD**) + **4**

(designato anche con **S4** deontico)

KD5 con **D**(**KD5**) = **D**(**KD**) + **5**

KD45 con **D**(**KD45**) = **D**(**KD5**) + **4**

(designato anche con **S5** deontico)



Alcuni rapporti di inclusione sono naturalmente immediati. Per esempio il fatto che **KD** $\supset$ **K**. Altri invece non lo sono come:

1. **KT** $\supset$ **KD**
2. **KT5** $\supset$ **KD45**

La validità dei rapporti di inclusione espressi risulta dai teoremi del paragrafo successivo.

1.2 Alcuni teoremi di logica modale

1. In **K** (e quindi in tutti i calcoli modali normali) valgono le seguenti regole derivabili:

a. Regole di distributività (e di esportazione) della necessità rispetto alla congiunzione (**Distr**$\Box\wedge$)

$$\text{a)}\quad \Box(\alpha\wedge\beta) \vdash \Box\alpha\wedge\Box\beta$$

Derivazione:

$\alpha\wedge\beta \vdash \alpha\wedge\beta$	**A**
$\alpha\wedge\beta \vdash \alpha$	**E**$\wedge$
$\Box(\alpha\wedge\beta) \vdash \Box\alpha$	**N**
$\alpha\wedge\beta \vdash \beta$	**E**$\wedge$
$\Box(\alpha\wedge\beta) \vdash \Box\beta$	**N**
$\Box(\alpha\wedge\beta) \vdash \Box\alpha\wedge\Box\beta$	**I**$\wedge$

$$\text{b)}\quad \Box\alpha\wedge\Box\beta \vdash \Box(\alpha\wedge\beta)$$

Derivazione:

$\alpha \vdash \alpha$	**A**
$\beta \vdash \beta$	**A**
$\alpha\,\beta \vdash \alpha\wedge\beta$	**I**$\wedge$
$\Box\alpha\,\Box\beta \vdash \Box(\alpha\wedge\beta)$	**N**
$\Box\alpha\wedge\Box\beta \vdash \Box(\alpha\wedge\beta)$	$\wedge$**I**

b. Regole di trasformazione di ❒ in ◊ e viceversa (**Tr**… e in breve **Tr**)

a) $\Box\alpha \vdash \neg\Diamond\neg\alpha$

Derivazione:

$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	**A**, **DN**
$\Box\alpha \vdash \Box\neg\neg\alpha$	**N**
$\Box\alpha \vdash \neg\neg\Box\neg\neg\alpha$	**DN**
$\Box\alpha \vdash \neg\Diamond\neg\alpha$	def. ◊

b) $\Diamond\alpha \vdash \neg\Box\neg\alpha$

Segue da definizione di ◊.

Per applicazione di **DN** valgono naturalmente anche le varianti $\neg\Box\alpha \vdash \Diamond\neg\alpha$, $\Box\neg\alpha \vdash \neg\Diamond\alpha$, $\neg\Box\neg\alpha \vdash \Diamond\alpha$ e $\neg\Diamond\alpha \vdash \Box\neg\alpha$, $\Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Box\alpha$, $\neg\Diamond\neg\alpha \vdash \Box\alpha$.

c. Regole iterate di trasformazione degli operatori modali (**Trr**)

a) $\Box\Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Diamond\Box\alpha$

Derivazione:

$\Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Box\alpha$	**Tr**
$\Box\Diamond\neg\alpha \vdash \Box\neg\Box\alpha$	**N**
$\Box\neg\Box\alpha \vdash \neg\Diamond\Box\alpha$	**Tr**
$\Box\Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Diamond\Box\alpha$	**KS**

b) $\neg\Box\Diamond\alpha \vdash \Diamond\Box\neg\alpha$

Derivazione:

$\neg\Box\neg\alpha \vdash \Diamond\alpha$	**Tr**
$\Box\neg\Box\neg\alpha \vdash \Box\Diamond\alpha$	**N**
$\neg\Box\Diamond\alpha \vdash \neg\Box\neg\Box\neg\alpha$	**C**
$\neg\Box\Diamond\alpha \vdash \Diamond\Box\neg\alpha$	def. $\Diamond$

In generale, se una formula negata è preceduta da una stringa di operatori modali, allora si può esportare la negazione cambiando $\Box$ in $\Diamond$ e $\Diamond$ in $\Box$; similmente, la negazione si può introdurre avendo sempre cura di trasformare $\Box$ in $\Diamond$ e $\Diamond$ in $\Box$.

d. Regola di possibilitazione (**P**)

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\Diamond\alpha \vdash \Diamond\beta}$$

Derivazione:

$\alpha \vdash \beta$	H
$\neg\beta \vdash \neg\alpha$	**C**
$\Box\neg\beta \vdash \Box\neg\alpha$	**N**
$\neg\Box\neg\alpha \vdash \neg\Box\neg\beta$	**C**
$\Diamond\alpha \vdash \Diamond\beta$	def. $\Diamond$

2. L'assioma **D** è derivabile in **KT**.

Derivazione:

$\Box\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	da **T**
$\alpha \vdash \neg\Box\neg\alpha$	**C**
$\alpha \vdash \Diamond\alpha$	def. $\Diamond$
$\Box\alpha \vdash \alpha$	da **T**
$\Box\alpha \vdash \Diamond\alpha$	**KS**
$\vdash \Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$	**I**$\rightarrow$

Così è dimostrato che **KT** $\supset$ **KD**.

4. In **KT5** è derivabile l'assioma **4**.

Derivazione:

$\Box\neg\Box\alpha \vdash \neg\Box\alpha$		da **T**
$\Box\alpha \vdash \neg\Box\neg\Box\alpha$		**C**
$\Box\alpha \vdash \Diamond\Box\alpha$		def. $\Diamond$
$\Box\alpha \vdash \Box\Diamond\Box\alpha$	*	per **5**
$\Diamond\neg\alpha \vdash \Box\Diamond\neg\alpha$		da **5**
$\Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Diamond\Box\alpha$		per **Trr**
$\Diamond\Box\alpha \vdash \neg\Diamond\neg\alpha$		**C**
$\Diamond\Box\alpha \vdash \Box\alpha$		per **Tr**
$\Box\Diamond\Box\alpha \vdash \Box\Box\alpha$	**	**N**
$\Box\alpha \vdash \Box\Box\alpha$		**KS (*,**)**

Mettendo insieme i vari risultati si ottiene, infine, che **KT5** $\supset$ **KD45**, ovvero che **KT5** è il sistema più potente.

$\vdash_{\mathbf{c}}$ =: derivabilità nel calcolo **c**.

2. Semantica relazionale (di Kripke) delle logiche modali

2.1 Definizioni preliminari

Def. 1: Struttura o frame ($<W,R>$)

$$frame = <W,R>$$

W = insieme di mondi possibili x,y,z,u,v,w ....

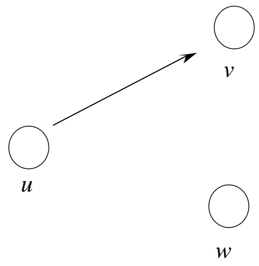
R = relazione di accessibilità su W

= un insieme di coppie ordinate di elementi appartenenti a W ($R \subseteq W \times W$, ove $W \times W$ è il prodotto cartesiano di W per W)

Sia $W = \{u,v,w\}$. Allora:

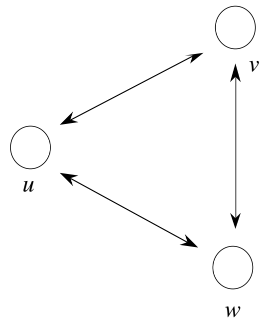
$$W \times W = \begin{array}{l} \{<u,u>,<u,v>,<u,w>, \\ <v,u>,<v,v>,<v,w>, \\ <w,u>,<w,v>,<w,w>\} \end{array}$$

1. Esempio:



$u\ R\ v$, $R = \{<u,v>\}$ e $R \subseteq W \times W$.

2. Esempio:

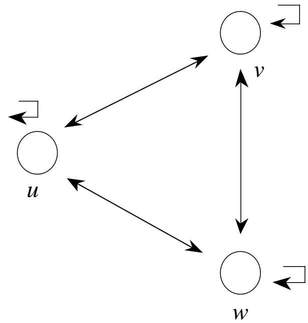


uRv, $vR\,u$, uRw, wRu, wRv e vRw,

$R = \{<u,v>,<v,u>,<u,w>,<w,u>,<w,v>,<v,w>\}$

e vale $R \subseteq W \times W$.

3. Esempio:



R è totale

Def. 2: Interpretazione su W (I)

$$I : V \times W \rightarrow \{0\ 1\}$$

Def. 3: Modello ($<W,R,I>$)

Se $<W,R>$ è una struttura e I è una interpretazione su W allora $<W,R,I>$ è detto un modello basato su $<W,R>$.

Def. 4: Formula vera in un mondo di un modello ($<W,R,I> \models_u \alpha$)

Definizione induttiva:

Base: $\alpha \equiv p$

$<W,R,I> \models_u p \Leftrightarrow I(p,u) = 1$

Passo: $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$

$<W,R,I> \models_u \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow <W,R,I> \models_u \beta$ *et* $<W,R,I> \models_u \gamma$

$\alpha \equiv \beta \vee \gamma$

$<W,R,I> \models_u \beta \vee \gamma \Leftrightarrow <W,R,I> \models_u \beta$ *vel* $<W,R,I> \models_u \gamma$

$\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$

$<W,R,I> \models_u \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow (<W,R,I> \models_u \beta \Rightarrow <W,R,I> \models_u \gamma)$

$\alpha \equiv \neg\beta$

$<W,R,I> \models_u \neg\beta \Leftrightarrow <W,R,I> \not\models_u \beta$

$\alpha \equiv \Box\beta$

$<W,R,I> \models_u \Box\beta \Leftrightarrow (om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta)$

Nota: verità di una possibilitazione

$\Diamond\alpha =_{def} \neg\Box\neg\alpha$. Ne segue:

$<W,R,I> \models_u \Diamond\beta \Leftrightarrow <W,R,I> \models_u \neg\Box\neg\beta)$ def. $\Diamond$

$\Leftrightarrow <W,R,I> \not\models_u \Box\neg\beta)$ def. $\models$

$\Leftrightarrow non(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow$

$\Rightarrow <W,R,I> \models_v \neg\beta)$ def. $\models$

$\Leftrightarrow non(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow$

$\Rightarrow <W,R,I> \not\models_v \beta)$ def. $\models$

$\Leftrightarrow (ex\ v)(u\ R\ v\ et <W,R,I> \models_v \beta)$ Tr *om ex*

Def. 5: Verità di un insieme di formule X in un mondo di un modello

$$<W,R,I> \models_u X \Leftrightarrow (om\ \alpha)(\alpha \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_u \alpha)$$

Def. 6: Conseguenza logica in un modello

$$X \Vdash_{<W,R,I>} \alpha \Leftrightarrow (om\ u)(<W,R,I> \models_u X \Rightarrow <W,R,I> \models_u \alpha)$$

Def. 7: Conseguenza logica in tutti i modelli di una struttura (*conseguenza logica in un struttura*)

$$X \Vdash_{<W,R>} \alpha \Leftrightarrow (om\ I\ su\ W)(X \Vdash_{<W,R,I>} \alpha)$$

$$\text{in breve } \Leftrightarrow (om\ I)(X \Vdash_{<W,R,I>} \alpha)$$

Def. 8: Conseguenza logica in tutti i modelli di tutte le strutture appartenenti ad una certa classe (*conseguenza logica in tutte le strutture di una certa classe*)

$$X \Vdash_{R\ldots} \alpha \Leftrightarrow (om <W,R> \text{ con } R\ldots)(X \Vdash_{<W,R>} \alpha)$$

(ove i puntini stanno per le proprietà caratterizzanti R)

Def. 9: *Conseguenza logica in tutti i modelli di tutte le strutture* (*conseguenza logica in tutte le strutture*)

$$X \Vdash \alpha \Leftrightarrow (om <W,R>)(X \Vdash_{<W,R>} \alpha)$$

Def. 10: *Soddisfacibilità di una formula in qualche modello di una struttura appartenente ad una certa classe* (*soddisfacibilità di una formula in qualche struttura di una certa classe*)

$${}^{R\ldots}Sod\ \alpha \Leftrightarrow (ex <W,R,I> con\ R\ldots)(ex\ u)(<W,R,I> \models_u \alpha)$$

Def. 11: *Soddisfacibilità di una formula in qualche modello di una struttura* (*soddisfacibilità di una formula in qualche struttura*)

$$Sod\ \alpha \Leftrightarrow (ex <W,R,I>)(ex\ u)(<W,R,I> \models_u \alpha)$$

Def. 12: *Soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche modellodi una struttura appartenente ad una certa classe* (*soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche struttura di una certa classe*)

$${}^{R\ldots}Sod\ X \Leftrightarrow (ex <W,R,I> con\ R\ldots)(ex\ u)$$
$$(om\ \alpha)(\alpha \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_u \alpha)$$

Def. 13: *Soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche modello di una struttura* (*soddisfacibilità di un insieme di formule inqualche struttura*)

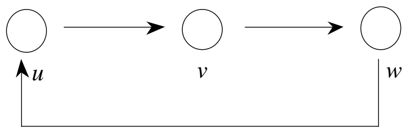
$$Sod\ X \Leftrightarrow (ex <W,R,I>)(ex\ u)(om\ \alpha)(\alpha \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_u \alpha)$$

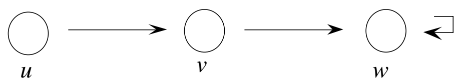
2.2 Correttezza dei calcoli modali

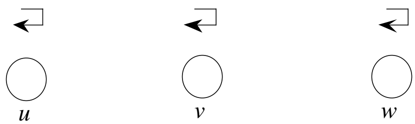
Def. 1: R seriale

$$R \text{ è seriale} \Leftrightarrow (om\ u)(ex\ v)(u\ R\ v)$$

Esempio:



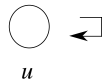




Def. 2: R riflessiva

$$R \text{ è riflessiva} \Leftrightarrow (om\ u)(u\ R\ u)$$

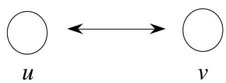
Esempio:



Def. 3: R simmetrica

$$R \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow (om\ u)(om\ v)(u\ R\ v \Leftrightarrow v\ R\ u)$$

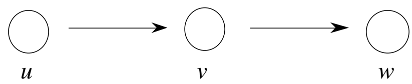
Esempio:



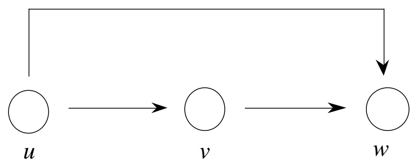
Def. 4: R transitiva

$$R \text{ è transitiva} \Leftrightarrow (om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ v\ R\ w \Rightarrow u\ R\ w)$$

Esempio: se vale



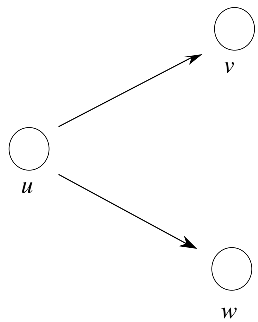
deve valere anche:



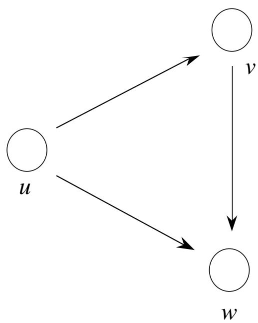
Def. 5: R euclidea

$$R \text{ è euclidea} \Leftrightarrow (om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$$

Siano, per esempio, dati i tre seguenti mondi collegati tra loro dalla relazione indicata dalle frecce:



Allora *R* è euclidea se e solo se vale anche *v R w*, ossia:



Teorema 1: L'euclidicità implica la riflessività secondaria.

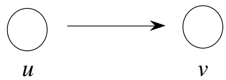
H: $(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$

Dem: $(om\ u)(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v)$

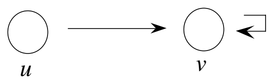
Dimostrazione:

$(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$	H
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v$	Eom
$u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v$	Ass
$(om\ u)(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v)$	Iom

Esempio: se vale



allora vale:



Teorema 2: L'euclidicità implica la simmetria secondaria

H: $(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$

Dem: $(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\ et\ w\ R\ v)$

Dimostrazione:

$(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$ H

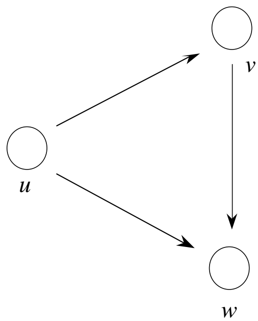
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w$ E*om*

$u\ R\ w\ et\ u\ R\ v \Rightarrow w\ R\ v$ E*om*

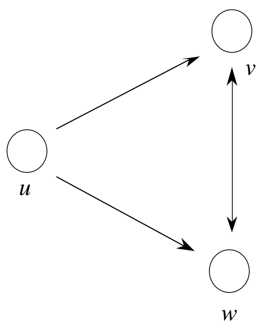
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\ et\ w\ R\ v$ per I*et*

$(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\ et\ w\ R\ v)$ I*om*

Esempio: se vale



allora vale anche:



2.2.1 Teorema di correttezza di K *rispetto a* ||–

$$X \vdash_{\mathbf{K}} \alpha \Rightarrow X \Vdash \alpha$$

Dimostrazione:

ad **N**

$$\frac{X \vdash \alpha}{\Box X \vdash \Box\alpha}$$

Hi: $X \Vdash \alpha$ Dem: $\Box X \Vdash \Box\alpha$

$$\downarrow$$

H: $<W,R,I> \models_u \Box X$ Dem: $<W,R,I> \models_u \Box\alpha$

Hi: $X \Vdash \alpha$

H: $<W,R,I> \models_u \Box X$ Dem: $<W,R,I> \models_u \Box\alpha$

Hi: $X \Vdash \alpha$

Dimostrazione:

$(om\ \beta)(\beta \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_u \Box\beta)$	da H per def. di $\Box X$
$\beta \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_u \Box\beta$	E*om*
$\beta \in X$	a
$<W,R,I> \models_u \Box\beta$	mp
$(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta)$	def. $\models$
$u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta$	E*om*
$u\ R\ v$	a
$<W,R,I> \models_v \beta$	mp
$\beta \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta$	s
$(om\ \beta)(\beta \in X \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta)$	I*om*
$<W,R,I> \models_v X$	def. $\models$
$(om<W,R>)(om\ I)(om\ u)(<W,R,I> \models_u X \Rightarrow$	
$\Rightarrow <W,R,I> \models_u \alpha)$	da Hi
$<W,R,I> \models_v X \Rightarrow <W,R,I> \models_v \alpha$	E*om*
$<W,R,I> \models_v \alpha$	mp
$u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \alpha$	s
$(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \alpha)$	I*om*
$<W,R,I> \models_u \Box\alpha$	def. $\models$

2.2.2 Teorema di correttezza di **KD** *rispetto a* $\Vdash_{R\ \mathrm{ser}}$

$$X \vdash_{\mathbf{KD}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R\ \mathrm{ser}} \alpha$$

Dem: $\Box\alpha \Vdash_{R\ \mathrm{ser}} \Diamond\alpha$

$\downarrow$

R ser $\Rightarrow$ ($<W,R,I> \models_u \Box\alpha \Rightarrow <W,R,I> \models_u \Diamond\alpha$) def. $\Vdash_{R\ \mathrm{ser}}$

$\downarrow$

H: R ser, $<W,R,I> \models_u \Box\alpha$ Dem: $<W,R,I> \models_u \Diamond\alpha$

Dimostrazione:

$<W,R,I> \models_u \Box\alpha$	da H
$(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \alpha)$	def. $\models$
$u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \alpha$	E*om*
$u\ R\ v$	a
$u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \models_v \alpha$	mp, I*et*
$(ex\ v)(u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \models_v \alpha)$	I*ex*
$u\ R\ v \Rightarrow (ex\ v)(u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \models_v \alpha)$	s
$(ex\ v)(u\ R\ v) \Rightarrow (ex\ v)(u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \models_v \alpha)$	*ex*I
$(ex\ v)(u\ R\ v)$	da H
$(ex\ v)(u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \models_v \alpha)$	mp
$<W,R,I> \models_u \Diamond\alpha$	def. $\models$

2.2.3 Teorema di correttezza di **KT** *rispetto a* $\Vdash_{R\ \mathrm{rifl}}$

$$X \vdash_{\mathbf{KT}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R\ \mathrm{rifl}} \alpha$$

Dem: $\Box\alpha \Vdash_{R\ \mathrm{rifl}} \alpha$

$$\downarrow$$

H: R rifl, $<W,R,I> \models_u \Box\alpha$ Dem: $<W,R,I> \models_u \alpha$

Dimostrazione:

$<W,R,I> \models_u \Box\alpha$	da H
$(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \alpha)$	def. $\models$
$u\ R\ u \Rightarrow <W,R,I> \models_u \alpha$	E*om*
$u\ R\ u$	da H
$<W,R,I> \models_u \alpha$	mp

2.2.4 Teorema di correttezza di **K4** ***r****ispetto a* $\Vdash_{R\ \mathrm{trans}}$

$$X \vdash_{\mathbf{K4}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R\ \mathrm{trans}} \alpha$$

Dem: $\Box\alpha \Vdash_{R\ \mathrm{trans}} \Box\Box\alpha$

$\downarrow$

H: R trans, $<W,R,I> \models_u \Box\alpha$ Dem: $<W,R,I> \models_u \Box\Box\alpha$

$\downarrow$

H: R trans, $<W,R,I> \not\models_u \Box\Box\alpha$ Dem: $<W,R,I> \not\models_u \Box\alpha$

Dimostrazione:

$non(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \Box\alpha)$	da H per def. $\models$
$(ex\ v)(u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \not\models_v \Box\alpha)$	Tr *om ex*, Tr $\Rightarrow$ *et*
$u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \not\models_v \Box\alpha$	E*ex*
$u\ R\ v\ et\ non\ (om\ z)(v\ R\ z \Rightarrow <W,R,I> \models_z \alpha)$	per def. $\models$
$u\ R\ v\ et\ (ex\ z)(v\ R\ z\ et\ <W,R,I> \not\models_z \alpha)$	per Tr *om ex* e Tr $\Rightarrow$ *et*
$u\ R\ v\ et\ v\ R\ z\ et\ <W,R,I> \not\models_z \alpha$	per E*ex*
$<W,R,I> \not\models_z \alpha$	E*et*
$u\ R\ v\ et\ v\ R\ z$	E*et*
$u\ R\ v\ et\ v\ R\ z \Rightarrow u\ R\ z$	da H
$u\ R\ z$	mp
$u\ R\ z\ et\ <W,R,I> \not\models_z \alpha$	I*et*
$(ex\ z)(u\ R\ z\ et\ <W,R,I> \not\models_z \alpha)$	I*ex*
$non(om\ z)(u\ R\ z \Rightarrow <W,R,I> \models_z \alpha)$	Tr *ex om*, Tr *et* $\Rightarrow$
$<W,R,I> \not\models_u \Box\alpha$	per def. $\models$

2.2.5 Teorema di correttezza di **K5** ***r****ispetto a* $\Vdash_{R\ \mathrm{eucl}}$

$$X \vdash_{\mathbf{K5}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R\ \mathrm{eucl}} \alpha$$

Dem: $\Diamond\alpha \Vdash_{R\ \mathrm{eucl}} \Box\Diamond\alpha$

$\downarrow$

H: R eucl, $<W,R,I> \models_u \Diamond\alpha$ Dem: $<W,R,I> \models_u \Box\Diamond\alpha$

Dimostrazione:

$<W,R,I> \not\models_u \Box\Diamond\alpha$		Ha
$non(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow <W,R,I> \models_v \Diamond\alpha)$		def. $\models$
$(ex\ v)(u\ R\ v\ et\ <W,R,I> \not\models_v \Diamond\alpha)$		Tr *om ex*, Tr $\Rightarrow$ *et*
$u\ R\ v$	*	E*ex*, E*et*
$<W,R,I> \not\models_v \Diamond\alpha$		E*ex*, E*et*
$non\ (ex\ z)(v\ R\ z\ et\ <W,R,I> \models_z \alpha)$		def. $\models$
$(om\ z)(v\ R\ z \Rightarrow <W,R,I> \not\models_z \alpha)$	***	Tr *ex om*, Tr *et* $\Rightarrow$
$<W,R,I> \models_u \Diamond\alpha$		da H
$(ex\ w)(u\ R\ w\ et\ <W,R,I> \models_w \alpha)$		def. $\models$
$u\ R\ w$	**	E*ex*, E*et*
$<W,R,I> \models_w \alpha$		E*ex*, E*et*
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ w$		I*et* (da * e **)
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w$		da H
$v\ R\ w$		mp
$v\ R\ w \Rightarrow <W,R,I> \not\models_w \alpha$		E*om* (da ***)
$<W,R,I> \not\models_w \alpha$		mp
$<W,R,I> \models_w \alpha\ et\ <W,R,I> \not\models_w \alpha$		I*et*
$<W,R,I> \models_u \Box\Diamond\alpha$		(*non* **k**)

2.3 Interpretazioni dei calcoli modali

A) Diversi tipi di necessità ontica

necessità logica	necessità espressa dalle leggi logiche	leggi logiche = proposizioni che descrivono la struttura logica degli universi oggettuali (definibile attraverso i termini logici ...)
necessità analitica	necessità espressa da leggi logiche + leggi formali specifiche	Leggi formali specifiche = proposizioni che descrivono la struttura specifica di determinati universi oggettuali di natura formale (definibile attraverso i termini specifici di qualche teoria formale...)
necessità ontologica	necessità espressa da leggi logiche + leggi ontologiche	leggi ontologiche = proposizioni che descrivono la struttura ontologica della realtà (definibile attraverso i termini dell'ontologia ...)
necessità naturale	necessità espressa dalle leggi naturali	leggi naturali = proposizioni che descrivono la struttura dell'universo naturale (definibile attraverso i termini specifici della teoria naturale relativa...)

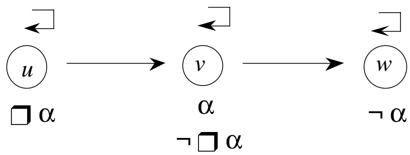
Riflessività generale della necessità ontica:

$$\Box p \rightarrow p$$

(1) Necessità fisica

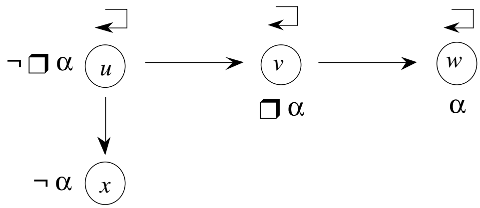
Consideriamo i due casi del decremento e dell'incremento della normatività fisica in maniera distinta e cerchiamo di rappresentarli sfruttando la tecnica grafica della semantica modale.

1. Caso: **KT**



In *u* si dà la legge $\Box\alpha$. In *v*, a cui si accede partendo da *u*, $\Box\alpha$ cade, anche se in *v* si trova di fatto α. Al suo posto non subentra alcun'altra legge ma si apre la possibilità per $\neg\alpha$. $\neg\alpha$ non può però avere luogo in *v*, dato che in *v* è vera α. Ci sarà, dunque, un mondo possibile per *v* in cui è verificata $\neg\alpha$. Esso è *w*.

2. Caso: **KT**

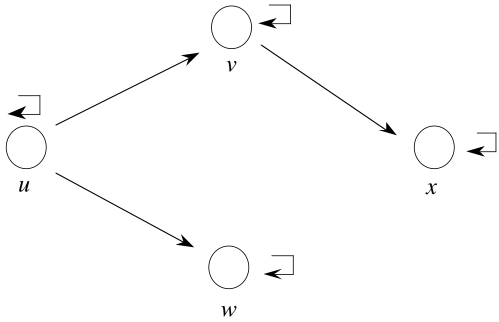


Nel passaggio da u a v si ha l'instaurarsi della nuova legge $\Box\alpha$. Ciò implica che α sia vera in v ed anche in w. In u, invece, è ancora aperta la possibilità di $\neg\alpha$. Allora, se non si vuole porre che $\neg\alpha$ sia realizzata proprio in u (il che è d'altra parte ammissibile) si deve postulare un mondo x, non coincidente con v, in cui sia vera $\neg\alpha$.

(2) Necessità metafisica: **KT5**

1. Modello universale

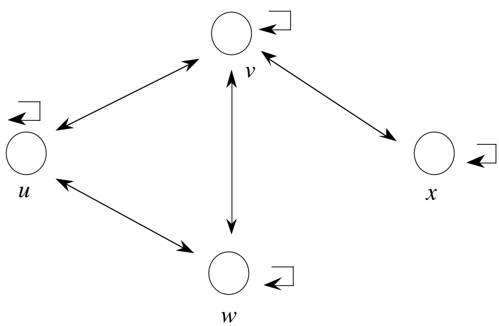
Approfondiamo la conoscenza dei modelli (o strutture base di modelli) del sistema allo scopo di chiarire l'affermazione fatta. È noto che **KT5** è caratterizzato da modelli in cui R è riflessiva ed euclidea. Ora la riflessività insieme con la euclidicità implica la riflessività, simmetria e transitività. Infatti sia dato il modello:



in cui sono evidenziate tutte le frecce implicate dalla riflessività oltre alle frecce esprimenti la relazione di u con v e con w e di v con x. Per la euclidicità si avrà allora:

$$
\begin{aligned}
&u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\\
&u\ R\ w\ et\ u\ R\ v \Rightarrow w\ R\ v\\
&u\ R\ v\ et\ u\ R\ u \Rightarrow v\ R\ u\\
&u\ R\ w\ et\ u\ R\ u \Rightarrow w\ R\ u\\
&v\ R\ x\ et\ v\ R\ v \Rightarrow x\ R\ v
\end{aligned}
$$

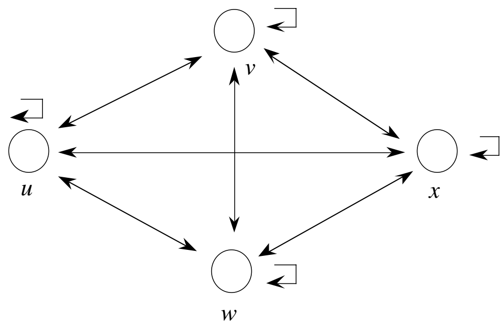
Il modello diventerà allora:



A questo punto, però, sempre in base alla euclidicità si ha ancora:

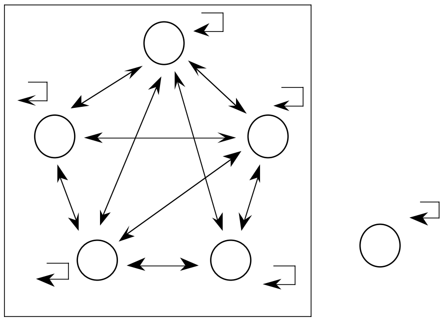
$$
\begin{aligned}
&v\ R\ w\ et\ v\ R\ x \Rightarrow w\ R\ x\\
&v\ R\ x\ et\ v\ R\ w \Rightarrow x\ R\ w\\
&v\ R\ u\ et\ v\ R\ x \Rightarrow u\ R\ x\\
&v\ R\ x\ et\ v\ R\ u \Rightarrow x\ R\ u
\end{aligned}
$$

Pertanto il modello completato sarà:

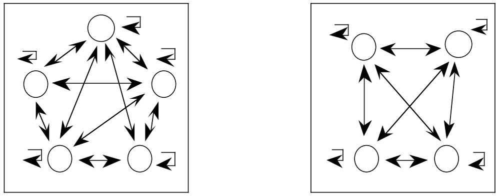


Così la relazione di accessibilità R è caratterizzata dalla riflessività, dalla simmetria e dalla transitività, ovvero è una relazione d'equivalenza. Pertanto, in un modello siffatto ogni mondo relato con qualche mondo d'una classe d'equivalenza è relato con tutti gli altri appartenenti alla stessa classe. Se poi esiste una sola classe d'equivalenza, come nel nostro caso, allora il modello è detto universale.

Ci può essere tra i mondi di una struttura che funga da base per modelli di **KT5** un mondo irrelato con gli altri? La risposta è positiva, dal momento che un mondo può essere relato solo con se stesso in forza della riflessività, come mostra la figura seguente:



Non solo, si possono dare modelli con più insiemi di mondi relati tra loro, senza che tra questi insiemi intercorrano relazioni, come è illustrato dalla seguente seconda figura:



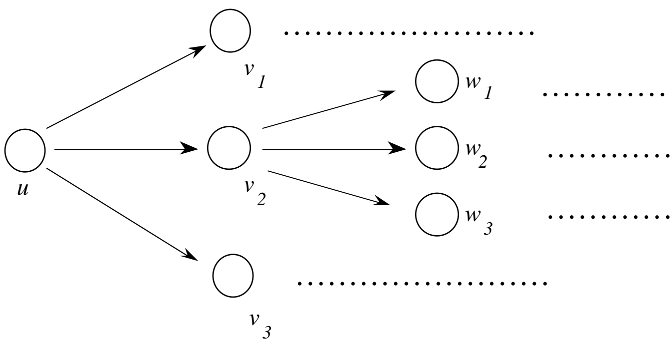
B) Forme di necessità deontica

Non riflessività generale degli operatori normativi:

$$\mathbf{O}p \nrightarrow p$$

1. Modello deontico minimale: **KD**

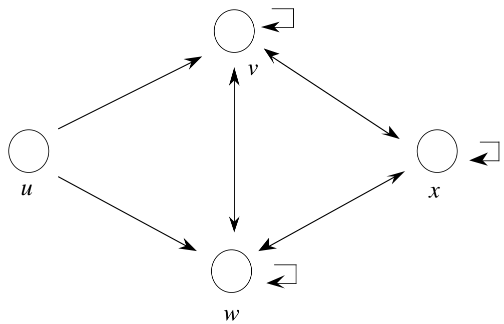
In conformità a quanto sopra si è detto a proposito della serialità, **KD** fornisce modelli strutturati schematicamente nella maniera seguente:



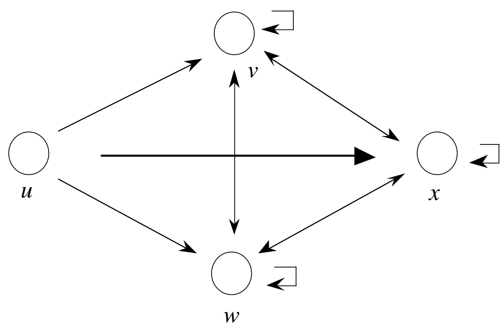
a) Le alternative deontiche di u v_1, v_2 e v_3 sono perfette rispetto allo standard degli obblighi di u. Infatti il *proprium* del concetto di alternativa deontica è costituito dalla perfezione di quest'ultima rispetto agli obblighi presenti nel mondo di cui è alternativa. Lo stesso discorso vale naturalmente per w_1, w_2 e w_3 rispetto a v_2.
b) Le alternative deontiche v_1, v_2 e v_3 non sono necessariamente perfette rispetto al loro standard di obblighi. Infatti anche le alternative sono mondi e, quindi, anche in esse c'è di principio distacco tra essere e dover essere. Analoghe considerazioni valgono anche per le altre alternative.

2. Modello deontico massimale: **KD45**

Le strutture su cui si basano i modelli di **KD5** sono caratterizzate da una *R* seriale ed euclidea. Ora sappiamo già che la euclidicità implica la riflessività e la simmetria secondarie. Dato uno schema iniziale di modello per **KD5** opportuno, si ha in forza della euclidicità:

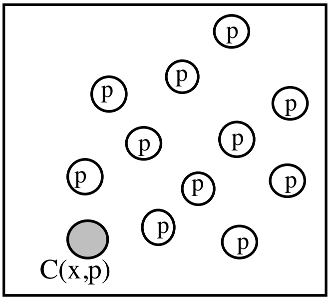


e in forza della transitività:



(C) Forme di necessità epistemica

Rappresentazione di **C**p



Cp è vero se e solo se p è vero in tutte le rappresentazioni del mondo ammesse da x

Sistema della Credenza = k + C1, C2 e C3:

C1: $C\alpha \rightarrow \neg C\neg\alpha$ (corrispondente a $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ (assioma D)

C2: $C\alpha \rightarrow CC\alpha$ (corrispondente a $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ (assioma 4)

C3: $\neg C\alpha \rightarrow C\neg C\alpha$ (corrispondente a $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ (assioma 5).