

LOGICA INTENSIONALE

S. Galvan

(Università Cattolica Milano)

PREREQUISITI

CALCOLO k DEGLI ENUNCIATI

$$\mathbf{L}(k) = \langle \mathbf{A}(k), \mathbf{F}(k) \rangle$$

$$\mathbf{k} = \langle \mathbf{L}(k), \mathbf{D}(k) \rangle$$

Regole non operazionali di k

Regola di assunzione A

$X \mid- \alpha$ (se $\alpha \in X$)	$\frac{\alpha}{\alpha}$
---------------------------------------	-------------------------

Regole operazionali di k

3. Regola di introduzione della congiunzione nel conseguente I_{\wedge}

$\frac{\begin{array}{l} X \vdash \alpha \\ Y \vdash \beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \alpha \wedge \beta}$	$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$
--	--

4. Regola di eliminazione della congiunzione nel conseguente E_{\wedge}

$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha / \beta}$	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha \quad \beta}$
--	--

5. Regola di introduzione della disgiunzione nel conseguente \vee

$\frac{X \vdash \alpha}{X \vdash \alpha \vee \beta / \beta \vee \alpha}$	$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta / \beta \vee \alpha}$
--	--

6. Regola di introduzione della disgiunzione nell'antecedente $\vee I$

$\frac{\begin{array}{l} X \ \alpha \vdash \gamma \\ Y \ \beta \vdash \gamma \end{array}}{X \cup Y \ \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$	$\frac{\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}$
---	---

7. Regola di introduzione dell'implicazione nel conseguente $I \rightarrow$

$\frac{X \ \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$	$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}$
---	--

8. Regola del *modus ponens* MP

$\frac{X \vdash \alpha \quad Y \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X \cup Y \vdash \beta}$	$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$
---	---

9. Regola della negazione classica (\neg -k)

$\frac{X \neg \alpha \vdash \beta \quad Y \neg \alpha \vdash \neg \beta}{X \cup Y \vdash \alpha}$	$\frac{[\neg \alpha] \quad \cdot \quad \cdot \quad \perp}{\alpha}$
---	--

Regole derivabili di k

1. Regola del rafforzamento delle premesse RP

$$\frac{X \vdash \beta}{X \alpha \vdash \beta}$$

2. Regola della concatenazione KS

$$\frac{\begin{array}{l} X \vdash \alpha \\ Y \alpha \vdash \beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \beta}$$

3. Regola intuizionistica della negazione (\neg i)

$$\frac{\begin{array}{l} X \vdash \alpha \\ Y \vdash \neg\alpha \end{array}}{X \cup Y \vdash \beta}$$

4. Regola minimale della negazione (\neg j)

$$\frac{\begin{array}{l} X \alpha \vdash \beta \\ Y \alpha \vdash \neg\beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \neg\alpha}$$

5. Regole della doppia negazione (DN)

$$\text{a) } \frac{X \mid \neg\neg\alpha}{X \mid \alpha}$$

$$\text{b) } \frac{X \mid \alpha}{X \mid \neg\neg\alpha}$$

6. Regola di autofondazione AF

$$\frac{X \mid \neg\alpha \mid \alpha}{X \mid \alpha}$$

7. Regola di autocontraddizione AC

$$\frac{X \mid \alpha \mid \neg\alpha}{X \mid \neg\alpha}$$

8. Regole di contrapposizione C

$$\text{a) } \frac{X \mid \alpha \mid \beta}{X \mid \neg\beta \mid \neg\alpha}$$

$$\text{b) } \frac{X \mid \alpha \mid \neg\beta}{X \mid \beta \mid \neg\alpha}$$

$$\text{c) } \frac{X \mid \neg\alpha \mid \beta}{X \mid \neg\beta \mid \alpha}$$

$$\text{d) } \frac{X \mid \neg\alpha \mid \neg\beta}{X \mid \beta \mid \alpha}$$

9. Paradossi dell'implicazione PI

a) $\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$

b) $\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

10. Regola di esaustione E

$$\frac{\begin{array}{l} X \alpha \vdash \beta \\ Y \neg\alpha \vdash \beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \beta}$$

11. Regola di eliminazione dell'implicatore E \rightarrow

$$\frac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X \alpha \vdash \beta}$$

12. Regola di introduzione dell'implicatore nell'antecedente \rightarrow I

$$\frac{\begin{array}{l} X \alpha \vdash \gamma \\ Y \neg\beta \vdash \gamma \end{array}}{X \cup Y \alpha \rightarrow \beta \vdash \gamma}$$

Derivazione (in **C**):

$\alpha \rightarrow \beta \mid - \beta$	A (bis), MP
$Y \beta \mid - \gamma$	H
$Y \alpha \rightarrow \beta \mid - \gamma$	KS
$X \neg \alpha \mid - \gamma$	H
$X \cup Y \alpha \rightarrow \beta \mid - \gamma$	E

13. Regola di introduzione del doppio implicatore $I \leftrightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} X \mid - \alpha \rightarrow \beta \\ Y \mid - \beta \rightarrow \alpha \end{array}}{X \cup Y \mid - \alpha \leftrightarrow \beta}$$

14. Regola di eliminazione del doppio implicatore $E \leftrightarrow$

$$\frac{X \mid - \alpha \leftrightarrow \beta}{X \mid - \alpha \rightarrow \beta / \beta \rightarrow \alpha}$$

15. Regole di trasformazione dei connettivi TrC (alcune esemplificazioni)

a) $\alpha \rightarrow \beta \mid - \neg(\alpha \wedge \neg \beta)$

c) $\alpha \rightarrow \beta \mid - \neg \alpha \vee \beta$

b) $\neg(\alpha \wedge \neg \beta) \mid - \alpha \rightarrow \beta$

d) $\neg \alpha \vee \beta \mid - \alpha \rightarrow \beta$

LOGICA MODALE

1. Sintassi della logica modale

1.1 Calcoli modali normali

$$\mathbf{L(m)} = \langle \mathbf{A(m)}, \mathbf{F(m)} \rangle.$$

$$\mathbf{A(m)} = \mathbf{A(k)} + \Box.$$

$\mathbf{F(m)} = \mathbf{F(k)}$ + la regola: se α è una formula allora anche $\Box\alpha$ è una formula.

$$\Diamond\alpha =_{\text{def}} \neg\Box\neg\alpha$$

$$\mathbf{m} = \langle \mathbf{L(m)}, \mathbf{D(m)} \rangle$$

$\mathbf{D(m)} = \mathbf{D(k)}$ + le regole tipiche dei calcoli modali.

a) Regola di necessitazione **N**

$$\frac{X \vdash \alpha}{\Box X \vdash \Box\alpha}$$

(ove con $\Box X$ si indica l'insieme di tutte le necessitazioni delle formule appartenenti a X)

b) Assiomi:

$$\mathbf{D}: \Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$$

$$\mathbf{T}: \Box\alpha \rightarrow \alpha$$

$$\mathbf{4}: \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$$

$$\mathbf{5}: \Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$$

Sistemi di logica modale:

K con $D(\mathbf{K}) = D(\mathbf{k}) + \mathbf{N}$

KD con $D(\mathbf{KD}) = D(\mathbf{K}) + \mathbf{D}$

KT con $D(\mathbf{KT}) = D(\mathbf{K}) + \mathbf{T}$

(designato anche con **T**)

K4 con $D(\mathbf{K4}) = D(\mathbf{K}) + \mathbf{4}$

K5 con $D(\mathbf{K5}) = D(\mathbf{K}) + \mathbf{5}$

K45 con $D(\mathbf{K45}) = D(\mathbf{K4}) + \mathbf{5}$

KT4 con $D(\mathbf{KT4}) = D(\mathbf{KT}) + \mathbf{4}$

(designato anche con **S4**)

KT5 con $D(\mathbf{KT5}) = D(\mathbf{KT}) + \mathbf{5}$

(designato anche con **S5**)

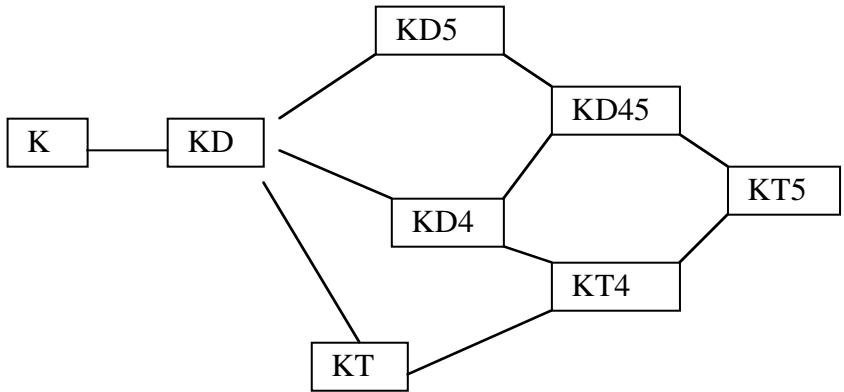
KD4 con $D(\mathbf{KD4}) = D(\mathbf{KD}) + \mathbf{4}$

(designato anche con **S4** deontico)

KD5 con $D(\mathbf{KD5}) = D(\mathbf{KD}) + \mathbf{5}$

KD45 con $D(\mathbf{KD45}) = D(\mathbf{KD5}) + \mathbf{4}$

(designato anche con **S5** deontico)



Alcuni rapporti di inclusione sono naturalmente immediati. Per esempio il fatto che $\mathbf{KD} \supset \mathbf{K}$. Altri invece non lo sono come:

1. $\mathbf{KT} \supset \mathbf{KD}$
2. $\mathbf{KT5} \supset \mathbf{KD45}$

La validità dei rapporti di inclusione espressi risulta dai teoremi del paragrafo successivo.

1.2 Alcuni teoremi di logica modale

1. In **K** (e quindi in tutti i calcoli modali normali) valgono le seguenti regole derivabili:

a. Regole di distributività (e di esportazione) della necessità rispetto alla congiunzione (**Distr** $\Box\wedge$)

$$\text{a) } \Box(\alpha \wedge \beta) \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$$

Derivazione:

$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	A
$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	E\wedge
$\Box(\alpha \wedge \beta) \vdash \Box\alpha$	N
$\alpha \wedge \beta \vdash \beta$	E\wedge
$\Box(\alpha \wedge \beta) \vdash \Box\beta$	N
$\Box(\alpha \wedge \beta) \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$	I\wedge

$$\text{b) } \Box\alpha \wedge \Box\beta \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$$

Derivazione:

$\alpha \vdash \alpha$	A
$\beta \vdash \beta$	A
$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	I\wedge
$\Box\alpha \wedge \Box\beta \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	N
$\Box\alpha \wedge \Box\beta \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	I\wedge

b. Regole di trasformazione di \Box in \Diamond e viceversa (**Tr**... e in breve **Tr**)

$$a) \Box\alpha \vdash \neg\Diamond\neg\alpha$$

Derivazione:

$$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

A, DN

$$\Box\alpha \vdash \Box\neg\neg\alpha$$

N

$$\Box\alpha \vdash \neg\neg\Box\neg\neg\alpha$$

DN

$$\Box\alpha \vdash \neg\Diamond\neg\alpha$$

def. \Diamond

$$b) \Diamond\alpha \vdash \neg\Box\neg\alpha$$

Segue da definizione di \Diamond .

Per applicazione di **DN** valgono naturalmente anche le varianti

$$\neg\Box\alpha \vdash \Diamond\neg\alpha, \Box\neg\alpha \vdash \neg\Diamond\alpha, \neg\Box\neg\alpha \vdash \Diamond\alpha \text{ e } \neg\Diamond\alpha \vdash \Box\neg\alpha, \Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Box\alpha, \\ \neg\Diamond\neg\alpha \vdash \Box\alpha$$

c. Regole iterate di trasformazione degli operatori modali (**Trr**)

$$a) \quad \Box \Diamond \neg \alpha \mid \neg \Diamond \Box \alpha$$

Derivazione:

$\Diamond \neg \alpha \mid \neg \Box \alpha$	Tr
$\Box \Diamond \neg \alpha \mid \Box \neg \Box \alpha$	N
$\Box \neg \Box \alpha \mid \neg \Diamond \Box \alpha$	Tr
$\Box \Diamond \neg \alpha \mid \neg \Diamond \Box \alpha$	KS

$$b) \quad \neg \Box \Diamond \alpha \mid \Diamond \neg \Box \alpha$$

Derivazione:

$\neg \Box \neg \alpha \mid \Diamond \alpha$	Tr
$\Box \neg \Box \neg \alpha \mid \Box \Diamond \alpha$	N
$\neg \Box \Diamond \alpha \mid \neg \Box \neg \Box \neg \alpha$	C
$\neg \Box \Diamond \alpha \mid \Diamond \neg \Box \alpha$	def. \Diamond

In generale, se una formula negata è preceduta da una stringa di operatori modali, allora si può esportare la negazione cambiando \Box in \Diamond e \Diamond in \Box ; similmente, la negazione si può introdurre avendo sempre cura di trasformare \Box in \Diamond e \Diamond in \Box .

d. Regola di possibilitazione (**P**)

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\diamond \alpha \vdash \diamond \beta}$$

Derivazione:

$$\begin{array}{l} \alpha \vdash \beta \\ \neg \beta \vdash \neg \alpha \quad \text{C} \\ \Box \neg \beta \vdash \Box \neg \alpha \quad \text{N} \\ \neg \Box \neg \alpha \vdash \neg \Box \neg \beta \quad \text{C} \\ \diamond \alpha \vdash \diamond \beta \quad \text{def. } \diamond \end{array}$$

2. L'assioma **D** è derivabile in **KT**.

Derivazione:

$$\begin{array}{l} \Box \neg \alpha \vdash \neg \alpha \quad \text{da T} \\ \alpha \vdash \neg \Box \neg \alpha \quad \text{C} \\ \alpha \vdash \diamond \alpha \quad \text{def. } \diamond \\ \Box \alpha \vdash \alpha \quad \text{da T} \\ \Box \alpha \vdash \diamond \alpha \quad \text{KS} \\ \vdash \Box \alpha \rightarrow \diamond \alpha \quad \text{I} \rightarrow \end{array}$$

Così è dimostrato che **KT** \supset **KD**.

4. In **KT5** è derivabile l'assioma **4**.

Derivazione:

$\Box \neg \Box \alpha \mid \neg \Box \alpha$		da T
$\Box \alpha \mid \neg \Box \neg \Box \alpha$		C
$\Box \alpha \mid \Diamond \Box \alpha$		def. \Diamond
$\Box \alpha \mid \Box \Diamond \Box \alpha$	*	per 5
$\Diamond \neg \alpha \mid \Box \Diamond \neg \alpha$		da 5
$\Diamond \neg \alpha \mid \neg \Diamond \Box \alpha$		per Trr
$\Diamond \Box \alpha \mid \neg \Diamond \neg \alpha$		C
$\Diamond \Box \alpha \mid \Box \alpha$		per Tr
$\Box \Diamond \Box \alpha \mid \Box \Box \alpha$	**	N
$\Box \alpha \mid \Box \Box \alpha$		KS (*,**)

Mettendo insieme i vari risultati si ottiene, infine, che **KT5** \supset **KD45**, ovvero che **KT5** è il sistema più potente.

\mid_{-c} =: derivabilità nel calcolo **c**.

2. Semantica relazionale (di Kripke) delle logiche modali

2.1 Definizioni preliminari

Def. 1: Struttura o frame $\langle W, R \rangle$

$frame = \langle W, R \rangle$

W = insieme di mondi possibili $x, y, z, u, v, w \dots$

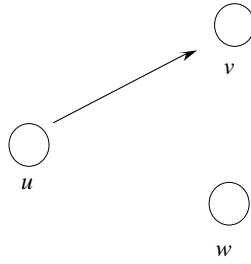
R = relazione di accessibilità su W

= un insieme di coppie ordinate di elementi appartenenti a W ($R \subseteq W \times W$, ove $W \times W$ è il prodotto cartesiano di W per W)

Sia $W = \{u, v, w\}$. Allora:

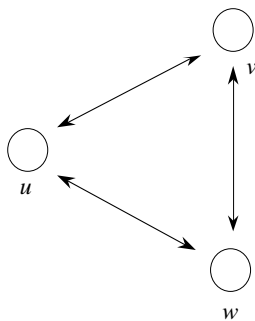
$$\begin{aligned} & \{ \langle u, u \rangle, \langle u, v \rangle, \langle u, w \rangle, \\ W \times W = & \langle v, u \rangle, \langle v, v \rangle, \langle v, w \rangle, \\ & \langle w, u \rangle, \langle w, v \rangle, \langle w, w \rangle \} \end{aligned}$$

1. Esempio:



$u R v, R = \{ \langle u, v \rangle \} \in R \subseteq W \times W.$

2. Esempio:

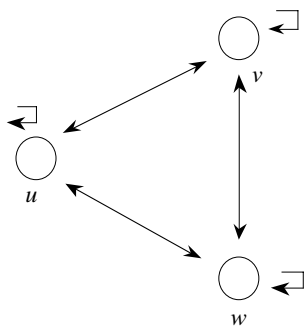


uRv, vRu, uRw, wRu, wRv e vRw ,

$R = \{ \langle u, v \rangle, \langle v, u \rangle, \langle u, w \rangle, \langle w, u \rangle, \langle w, v \rangle, \langle v, w \rangle \}$

e vale $R \subseteq W \times W$.

3. Esempio:



R è totale

Def. 2: Interpretazione su W (I)

$$I : V \times W \rightarrow \{0, 1\}$$

Def. 3: Modello ($\langle W, R, I \rangle$)

Se $\langle W, R \rangle$ è una struttura e I è una interpretazione su W allora $\langle W, R, I \rangle$ è detto un modello basato su $\langle W, R \rangle$.

Def. 4: Formula vera in un mondo di un modello ($\langle W, R, I \rangle \models_u \alpha$)

Definizione induttiva:

Base: $\alpha \equiv p$

$$\langle W, R, I \rangle \models_u p \Leftrightarrow I(p, u) = 1$$

Passo: $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \beta \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_u \gamma$$

$$\alpha \equiv \beta \vee \gamma$$

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \beta \vee \gamma \Leftrightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \beta \text{ vel } \langle W, R, I \rangle \models_u \gamma$$

$$\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$$

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow (\langle W, R, I \rangle \models_u \beta \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \gamma)$$

$$\alpha \equiv \neg\beta$$

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \neg\beta \Leftrightarrow \langle W, R, I \rangle \not\models_u \beta$$

$$\alpha \equiv \Box\beta$$

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box\beta \Leftrightarrow (om\ v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta)$$

Nota: verità di una possibilitazione

$\Diamond\alpha =_{\text{def}} \neg\Box\neg\alpha$. Ne segue:

$$\begin{aligned} \langle W, R, I \rangle \models_u \Diamond\beta &\Leftrightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \neg\Box\neg\beta && \text{def. } \Diamond \\ &\Leftrightarrow \langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box\neg\beta && \text{def. } \models \\ &\Leftrightarrow \text{non}(om\ v)(u R v \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \neg\beta) && \text{def. } \models \\ &\Leftrightarrow \text{non}(om\ v)(u R v \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \not\models_v \beta) && \text{def. } \models \\ &\Leftrightarrow (ex\ v)(u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_v \beta) && \text{Tr om ex} \end{aligned}$$

Def. 5: Verità di un insieme di formule X in un mondo di un modello

$$\langle W, R, I \rangle \models_u X \Leftrightarrow (om\ \alpha)(\alpha \in X \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \alpha)$$

Def. 6: Conseguenza logica in un modello

$$X \Vdash_{\langle W,R,I \rangle} \alpha \Leftrightarrow (\text{om } u)(\langle W,R,I \rangle \models_u X \Rightarrow \langle W,R,I \rangle \models_u \alpha)$$

*Def. 7: Conseguenza logica in tutti i modelli di una struttura
(conseguenza logica in un struttura)*

$$X \Vdash_{\langle W,R \rangle} \alpha \Leftrightarrow (\text{om } I \text{ su } W)(X \Vdash_{\langle W,R,I \rangle} \alpha)$$

in breve $\Leftrightarrow (\text{om } I)(X \Vdash_{\langle W,R,I \rangle} \alpha)$

*Def. 8: Conseguenza logica in tutti i modelli di tutte le
strutture appartenenti ad una certa classe (conseguenza
logica in tutte le strutture di una certa classe)*

$$X \Vdash_{R\dots} \alpha \Leftrightarrow (\text{om } \langle W,R \rangle \text{ con } R\dots)(X \Vdash_{\langle W,R \rangle} \alpha)$$

(ove i puntini stanno per le proprietà caratterizzanti R)

*Def. 9: Conseguenza logica in tutti i modelli di tutte le strutture
(conseguenza logica in tutte le strutture)*

$$X \Vdash \alpha \Leftrightarrow (\text{om } \langle W,R \rangle)(X \Vdash_{\langle W,R \rangle} \alpha)$$

Def. 10: Soddisfacibilità di una formula in qualche modello di una struttura appartenente ad una certa classe (soddisfacibilità di una formula in qualche struttura di una certa classe)

$$R...Sod \alpha \Leftrightarrow (ex \langle W,R,I \rangle \text{ con } R...)(ex u)(\langle W,R,I \rangle \models_u \alpha)$$

Def. 11: Soddisfacibilità di una formula in qualche modello di una struttura (soddisfacibilità di una formula in qualche struttura)

$$Sod \alpha \Leftrightarrow (ex \langle W,R,I \rangle)(ex u)(\langle W,R,I \rangle \models_u \alpha)$$

Def. 12: Soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche modello di una struttura appartenente ad una certa classe (soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche struttura di una certa classe)

$$R...Sod X \Leftrightarrow (ex \langle W,R,I \rangle \text{ con } R...)(ex u) \\ (om \alpha)(\alpha \in X \Rightarrow \langle W,R,I \rangle \models_u \alpha)$$

Def. 13: Soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche modello di una struttura (soddisfacibilità di un insieme di formule in qualche struttura)

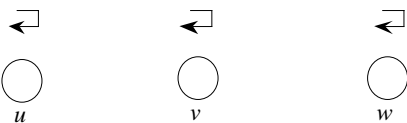
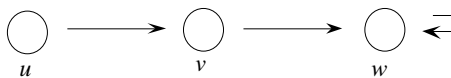
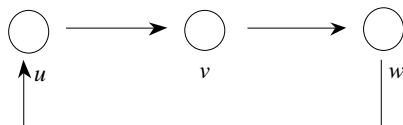
$$Sod X \Leftrightarrow (ex \langle W,R,I \rangle)(ex u)(om \alpha)(\alpha \in X \Rightarrow \langle W,R,I \rangle \models_u \alpha)$$

2.2 Correttezza dei calcoli modali

Def. 1: R seriale

$$R \text{ è seriale} \Leftrightarrow (\text{om } u)(\text{ex } v)(u R v)$$

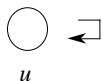
Esempio:



Def. 2: R riflessiva

$$R \text{ è riflessiva} \Leftrightarrow (\text{om } u)(u R u)$$

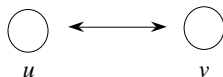
Esempio:



Def. 3: R simmetrica

$$R \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow (\text{om } u)(\text{om } v)(u R v \Leftrightarrow v R u)$$

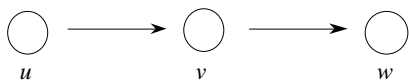
Esempio:



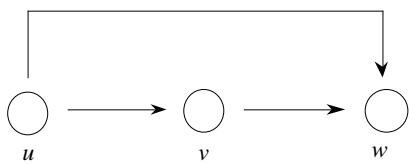
Def. 4: R transitiva

R è transitiva $\Leftrightarrow (\text{om } u)(\text{om } v)(\text{om } w)(u R v \text{ et } v R w \Rightarrow u R w)$

Esempio: se vale



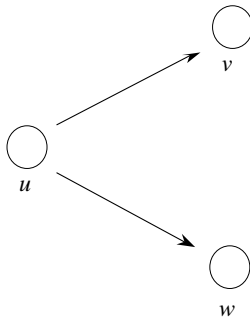
deve valere anche:



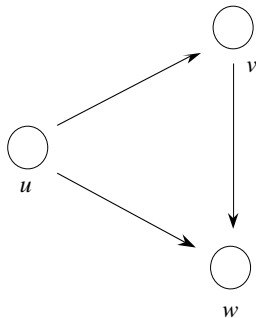
Def. 5: R euclidea

$$R \text{ è euclidea} \Leftrightarrow (\text{om } u)(\text{om } v)(\text{om } w)(u R v \text{ et } u R w \Rightarrow v R w)$$

Siano, per esempio, dati i tre seguenti mondi collegati tra loro dalla relazione indicata dalle frecce:



Allora R è euclidea se e solo se vale anche $v R w$, ossia:



Teorema 1: L'euclidicità implica la riflessività secondaria.

H: $(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$

Dem: $(om\ u)(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v)$

Dimostrazione:

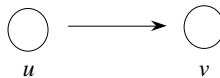
$(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$ H

$u\ R\ v\ et\ u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v$ Eom

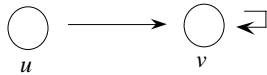
$u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v$ Ass

$(om\ u)(om\ v)(u\ R\ v \Rightarrow v\ R\ v)$ Iom

Esempio: se vale



allora vale:



Teorema 2: L'euclidicità implica la simmetria secondaria

H: $(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$

Dem: $(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\ et\ w\ R\ v)$

Dimostrazione:

$(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w)$ H

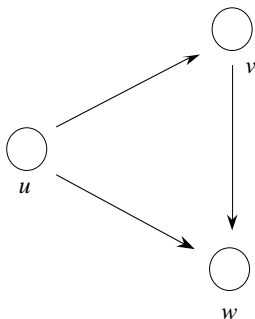
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w$ Eom

$u\ R\ w\ et\ u\ R\ v \Rightarrow w\ R\ v$ Eom

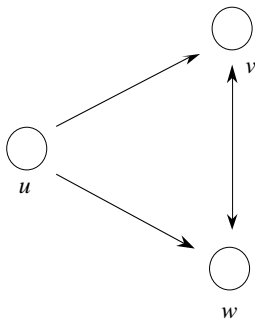
$u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\ et\ w\ R\ v$ per Iet

$(om\ u)(om\ v)(om\ w)(u\ R\ v\ et\ u\ R\ w \Rightarrow v\ R\ w\ et\ w\ R\ v)$ Iom

Esempio: se vale



allora vale anche:



2.2.1 Teorema di correttezza di \mathbf{K} rispetto a \Vdash

$$X \vdash_{\mathbf{K}} \alpha \Rightarrow X \Vdash \alpha$$

Dimostrazione:

ad N

$$X \vdash \alpha$$

$$\frac{}{\Box X \vdash \Box \alpha}$$

Hi: $X \Vdash \alpha$

Dem: $\Box X \Vdash \Box \alpha$

↓

H: $\langle W, R, I \rangle \models_u \Box X$

Dem: $\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$

Hi: $X \Vdash \alpha$

H: $\langle W, R, I \rangle \models_u \Box X$

Hi: $X \Vdash \alpha$

Dem: $\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$

Dimostrazione:

$(om \beta)(\beta \in X \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \Box \beta)$

$\beta \in X \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \Box \beta$

$\beta \in X$

$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \beta$

$(om v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta)$

$u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta$

$u R v$

$\langle W, R, I \rangle \models_v \beta$

$\beta \in X \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta$

$(om \beta)(\beta \in X \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta)$

$\langle W, R, I \rangle \models_v X$

$(om \langle W, R \rangle)(om I)(om u)(\langle W, R, I \rangle \models_u X \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \alpha)$

$\langle W, R, I \rangle \models_v X \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha$

$\langle W, R, I \rangle \models_v \alpha$

$u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha$

$(om v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$

$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$

da H per def. di $\Box X$

Eom

a

mp

def. \models

Eom

a

mp

s

Iom

def. \models

da Hi

Eom

mp

s

Iom

def. \models

2.2.2 Teorema di correttezza di **KD** rispetto a $\Vdash_{R \text{ ser}}$

$$X \vdash_{\mathbf{KD}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R \text{ ser}} \alpha$$

$$\text{Dem: } \Box \alpha \Vdash_{R \text{ ser}} \Diamond \alpha$$

↓

$$R \text{ ser} \Rightarrow (\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \Diamond \alpha) \quad \text{def. } \Vdash_{R \text{ ser}}$$

↓

$$\text{H: } R \text{ ser}, \langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$$

$$\text{Dem: } \langle W, R, I \rangle \models_u \Diamond \alpha$$

Dimostrazione:

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$$

da H

$$(om \ v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$$

def. \models

$$u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha$$

Eom

$$u R v$$

a

$$u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha$$

mp, Iet

$$(ex \ v)(u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$$

Iex

$$u R v \Rightarrow (ex \ v)(u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$$

s

$$(ex \ v)(u R v) \Rightarrow (ex \ v)(u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$$

exI

$$(ex \ v)(u R v)$$

da H

$$(ex \ v)(u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$$

mp

$$\langle W, R, I \rangle \models_u \Diamond \alpha$$

def. \models

2.2.3 Teorema di correttezza di **KT** rispetto a $\Vdash_{R \text{ rifl}}$

$$X \vdash_{\mathbf{KT}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R \text{ rifl}} \alpha$$

Dem: $\Box \alpha \Vdash_{R \text{ rifl}} \alpha$

↓

H: $R \text{ rifl}, \langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$

Dem: $\langle W, R, I \rangle \models_u \alpha$

Dimostrazione:

$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$

da H

$(\text{om } v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$

def. \models

$u R u \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_u \alpha$

Eom

$u R u$

da H

$\langle W, R, I \rangle \models_u \alpha$

mp

2.2.4 Teorema di correttezza di **K4** rispetto a $\Vdash_{R \text{ trans}}$

$$X \vdash_{\mathbf{K4}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R \text{ trans}} \alpha$$

Dem: $\Box \alpha \Vdash_{R \text{ trans}} \Box \Box \alpha$

↓

H: $R \text{ trans}, \langle W, R, I \rangle \models_u \Box \alpha$ Dem: $\langle W, R, I \rangle \models_u \Box \Box \alpha$

↓

H: $R \text{ trans}, \langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box \Box \alpha$

Dem: $\langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box \alpha$

Dimostrazione:

$non(om \ v)(u \ R \ v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \Box \alpha)$

da H per def. \models

$(ex \ v)(u \ R \ v \ et \ \langle W, R, I \rangle \not\models_v \Box \alpha)$

Tr $om \ ex$, Tr $\Rightarrow \ et$

$u \ R \ v \ et \ \langle W, R, I \rangle \not\models_v \Box \alpha$

E ex

$u \ R \ v \ et \ non(om \ z)(v \ R \ z \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_z \alpha)$

per def. \models

$u \ R \ v \ et \ (ex \ z)(v \ R \ z \ et \ \langle W, R, I \rangle \not\models_z \alpha)$

per Tr $om \ ex \ e$

Tr $\Rightarrow \ et$

$u \ R \ v \ et \ v \ R \ z \ et \ \langle W, R, I \rangle \not\models_z \alpha$

per E ex

$\langle W, R, I \rangle \not\models_z \alpha$

E et

$u \ R \ v \ et \ v \ R \ z$

E et

$u \ R \ v \ et \ v \ R \ z \Rightarrow u \ R \ z$

da H

$u \ R \ z$

mp

$u \ R \ z \ et \ \langle W, R, I \rangle \not\models_z \alpha$

I et

$(ex \ z)(u \ R \ z \ et \ \langle W, R, I \rangle \not\models_z \alpha)$

I ex

$non(om \ z)(u \ R \ z \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_z \alpha)$

Tr $ex \ om$, Tr $et \ \Rightarrow$

$\langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box \alpha$

per def. \models

2.2.5 Teorema di correttezza di **K5** rispetto a $\Vdash_{R \text{ eucl}}$

$$X \vdash_{\mathbf{K5}} \alpha \Rightarrow X \Vdash_{R \text{ eucl}} \alpha$$

Dem: $\diamond\alpha \Vdash_{R \text{ eucl}} \Box\diamond\alpha$

↓

H: $R \text{ eucl}, \langle W, R, I \rangle \models_u \diamond\alpha$

Dem: $\langle W, R, I \rangle \models_u \Box\diamond\alpha$

Dimostrazione:

$\langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box\diamond\alpha$

$\text{non}(\text{om } v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \diamond\alpha)$

$(\text{ex } v)(u R v \text{ et } \langle W, R, I \rangle \not\models_v \diamond\alpha)$

$u R v$

$\langle W, R, I \rangle \not\models_v \diamond\alpha$

$\text{non}(\text{ex } z)(v R z \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_z \alpha)$

$(\text{om } z)(v R z \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \not\models_z \alpha)$

$\langle W, R, I \rangle \models_u \diamond\alpha$

$(\text{ex } w)(u R w \text{ et } \langle W, R, I \rangle \models_w \alpha)$

$u R w$

$\langle W, R, I \rangle \models_w \alpha$

$u R v \text{ et } u R w$

$u R v \text{ et } u R w \Rightarrow v R w$

$v R w$

$v R w \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \not\models_w \alpha$

$\langle W, R, I \rangle \not\models_w \alpha$

$\langle W, R, I \rangle \models_w \alpha \text{ et } \langle W, R, I \rangle \not\models_w \alpha$

$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box\diamond\alpha$

Ha

def. \models

Tr *om ex*, Tr \Rightarrow *et*

* Eex, Eet

Eex, Eet

def. \models

*** Tr *ex om*, Tr *et* \Rightarrow

da H

def. \models

Eex, Eet

Eex, Eet

Iet (da * e **)

da H

mp

Eom (da ***)

mp

Iet

(non **k**)

2.3 Interpretazioni dei calcoli modali

A) Diversi tipi di necessità ontica

necessità logica	necessità espressa dalle leggi logiche	leggi logiche = proposizioni che descrivono la struttura logica degli universi oggettuali (definibile attraverso i termini logici ...)
necessità analitica	necessità espressa da leggi logiche + leggi formali specifiche	Leggi formali specifiche = proposizioni che descrivono la struttura specifica di determinati universi oggettuali di natura formale (definibile attraverso i termini specifici di qualche teoria formale...)
necessità ontologica	necessità espressa da leggi logiche + leggi ontologiche	leggi ontologiche = proposizioni che descrivono la struttura ontologica della realtà (definibile attraverso i termini dell'ontologia ...)
necessità naturale	necessità espressa dalle leggi naturali	leggi naturali = proposizioni che descrivono la struttura dell'universo naturale (definibile attraverso i termini specifici della teoria naturale relativa...)

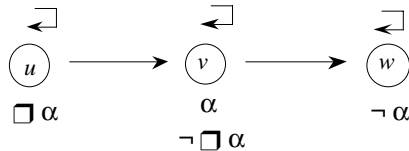
Riflessività generale della necessità ontica:

$$\Box p \rightarrow p$$

(1) Necessità fisica

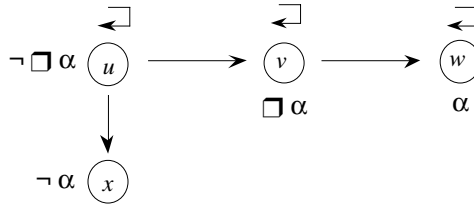
Consideriamo i due casi del decremento e dell'incremento della normatività fisica in maniera distinta e cerchiamo di rappresentarli sfruttando la tecnica grafica della semantica modale.

1. Caso: **KT**



In u si dà la legge $\Box\alpha$. In v , a cui si accede partendo da u , $\Box\alpha$ cade, anche se in v si trova di fatto α . Al suo posto non subentra alcun'altra legge ma si apre la possibilità per $\neg\alpha$. $\neg\alpha$ non può però avere luogo in v , dato che in v è vera α . Ci sarà, dunque, un mondo possibile per v in cui è verificata $\neg\alpha$. Esso è w .

2. Caso: **KT**

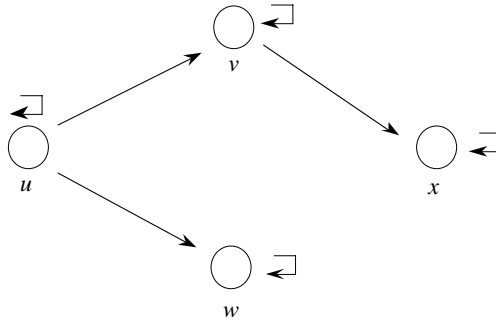


Nel passaggio da u a v si ha l'instaurarsi della nuova legge $\Box \alpha$. Ciò implica che α sia vera in v ed anche in w . In u , invece, è ancora aperta la possibilità di $\neg \alpha$. Allora, se non si vuole porre che $\neg \alpha$ sia realizzata proprio in u (il che è d'altra parte ammissibile) si deve postulare un mondo x , non coincidente con v , in cui sia vera $\neg \alpha$.

(2) Necessità metafisica: **KT5**

1. Modello universale

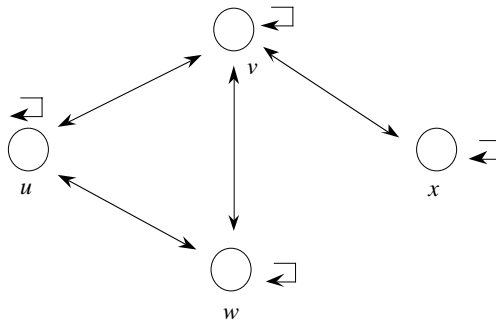
Approfondiamo la conoscenza dei modelli (o strutture base di modelli) del sistema allo scopo di chiarire l'affermazione fatta. È noto che **KT5** è caratterizzato da modelli in cui R è riflessiva ed euclidea. Ora la riflessività insieme con la euclideicità implica la riflessività, simmetria e transitività. Infatti sia dato il modello:



in cui sono evidenziate tutte le frecce implicate dalla riflessività oltre alle frecce esprimenti la relazione di u con v e con w e di v con x . Per la euclidicità si avrà allora:

$$\begin{aligned}
 u R v \text{ et } u R w &\Rightarrow v R w \\
 u R w \text{ et } u R v &\Rightarrow w R v \\
 u R v \text{ et } u R u &\Rightarrow v R u \\
 u R w \text{ et } u R u &\Rightarrow w R u \\
 v R x \text{ et } v R v &\Rightarrow x R v
 \end{aligned}$$

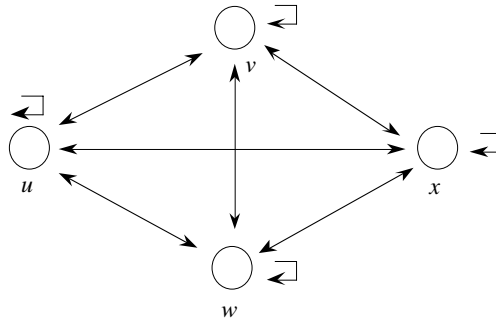
Il modello diventerà allora:



A questo punto, però, sempre in base alla euclidicità si ha ancora:

$$\begin{aligned}
 v R w \text{ et } v R x &\Rightarrow w R x \\
 v R x \text{ et } v R w &\Rightarrow x R w \\
 v R u \text{ et } v R x &\Rightarrow u R x \\
 v R x \text{ et } v R u &\Rightarrow x R u
 \end{aligned}$$

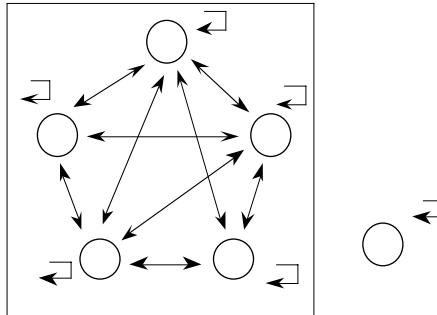
Pertanto il modello completato sarà:



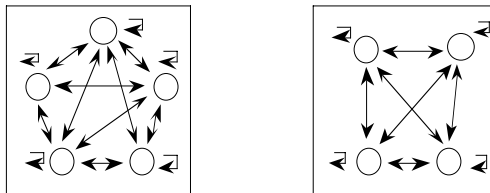
Così la relazione di accessibilità R è caratterizzata dalla riflessività, dalla simmetria e dalla transitività, ovvero è una relazione d'equivalenza. Pertanto, in un modello siffatto ogni mondo relato con qualche mondo d'una classe d'equivalenza è relato con tutti gli altri appartenenti alla stessa classe. Se poi esiste una sola classe d'equivalenza, come nel nostro caso, allora il modello è detto universale.

2. Modelli a galassia

Ci può essere tra i mondi di una struttura che funga da base per modelli di **KT5** un mondo irrelato con gli altri? La risposta è positiva, dal momento che un mondo può essere relato solo con se stesso in forza della riflessività, come mostra la figura seguente:



Non solo, si possono dare modelli con più insiemi di mondi relati tra loro, senza che tra questi insiemi intercorrano relazioni, come è illustrato dalla seguente seconda figura:



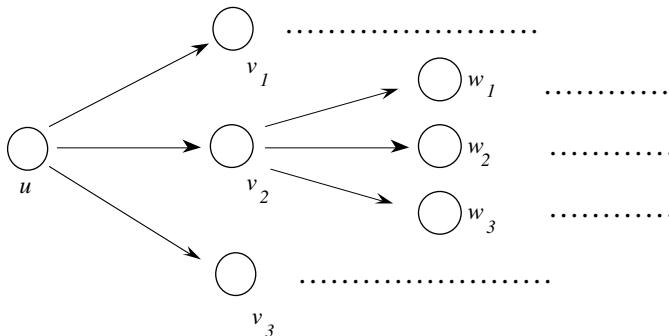
B) Forme di necessità deontica

Non riflessività generale degli operatori normativi:

$$Op \not\Rightarrow p$$

1. Modello deontico minimale: **KD**

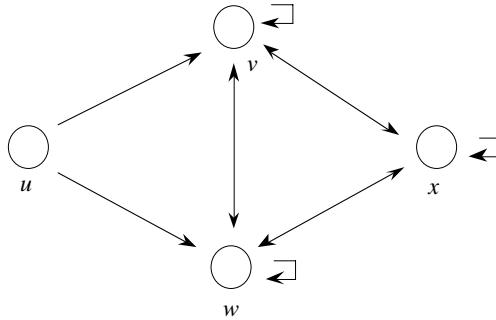
In conformità a quanto sopra si è detto a proposito della serialità, **KD** fornisce modelli strutturati schematicamente nella maniera seguente:



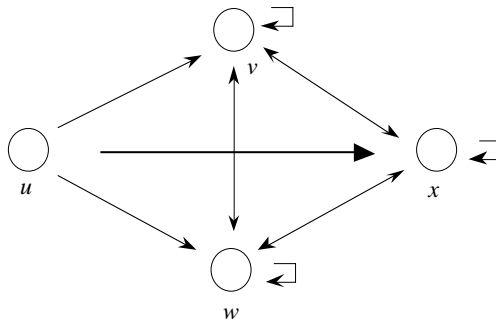
- Le alternative deontiche di u v_1 , v_2 e v_3 sono perfette rispetto allo standard degli obblighi di u . Infatti il *proprium* del concetto di alternativa deontica è costituito dalla perfezione di quest'ultima rispetto agli obblighi presenti nel mondo di cui è alternativa. Lo stesso discorso vale naturalmente per w_1 , w_2 e w_3 rispetto a v_2 .
- Le alternative deontiche v_1 , v_2 e v_3 non sono necessariamente perfette rispetto al loro standard di obblighi. Infatti anche le alternative sono mondi e, quindi, anche in esse c'è di principio distacco tra essere e dover essere. Analoghe considerazioni valgono anche per le altre alternative.

2. Modello deontico massimale: **KD45**

Le strutture su cui si basano i modelli di **KD5** sono caratterizzate da una R seriale ed euclidea. Ora sappiamo già che la euclidicità implica la riflessività e la simmetria secondarie. Dato uno schema iniziale di modello per **KD5** opportuno, si ha in forza della euclidicità:

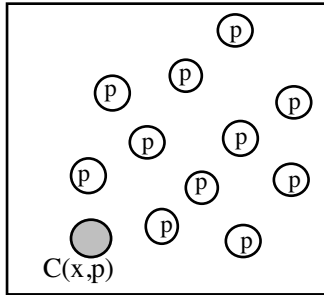


e in forza della transitività:



(C) Forme di necessità epistemica

Rappresentazione di Cp



Cp è **vero** se e solo se p è **vero** in tutte le rappresentazioni del mondo ammesse da x

Sistema della Credenza = k + C1, C2 e C3:

C1: $C\alpha \rightarrow \neg C\neg\alpha$ (corrispondente a $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ (assioma D))

C2: $C\alpha \rightarrow CC\alpha$ (corrispondente a $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ (assioma 4))

C3: $\neg C\alpha \rightarrow C\neg C\alpha$ (corrispondente a $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ (assioma 5)).