LOGICA MODALE DEI PREDICATI CON IDENTITA' E PREDICATO D'ESISTENZA

Sistema ontologico

PIES5

SINTASSI di PIES5

1. Estensione del linguaggio

a) È aggiunto all'alfabeto di PI il predicato d'esistenza E e l'operatore di necessità $\Box$.

b) Alle FF è aggiunta la clausola seguente: se α è una formula allora $\Box\alpha$ è una formula.

Def. 1: $\Diamond\alpha =: \neg\Box\neg\alpha$

Def. 2: $\forall.x\alpha(x) =: \forall x(Ex \rightarrow \alpha(x))$

Def. 3: $\exists.x\alpha(x) =: \exists x(Ex \wedge \alpha(x))$

2. Estensione del calcolo

2.1 Regole ed assiomi

Regola N di necessitazione:

$$\frac{X \vdash \alpha}{\Box X \vdash \Box \alpha}$$

(ove con $\Box X$ si indica l'insieme di tutte le necessitazioni delle formule appartenenti a X)

Assioma T: $\vdash \Box\alpha \to \alpha$

Assioma 5: $\vdash \Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

Assioma NE di necessitazione dei predicati reali:

Def.: $\mathbf{PRE}\alpha(x) =: \Diamond(\alpha(x) \wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x) \wedge \neg Ex)$

$$\alpha(x) \wedge \mathbf{PRE}\alpha(x) \vdash \Box\alpha(x)$$

Assioma di impossibilità del nulla IN:

$$\vdash \Box\exists x Ex$$

2.2. Regole derivabili

T1. Regola di distributività (e di esportazione) della necessità rispetto alla congiunzione (Distr$\Box\wedge$)

a) $\Box(\alpha \wedge \beta) \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$

b) $\Box\alpha \wedge \Box\beta \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$

T2. Regole di trasformazione di $\Box$ in $\Diamond$ e viceversa (Tr… e in breve Tr)

a) $\Box\alpha \vdash \neg\Diamond\neg\alpha$

b) $\Diamond\alpha \vdash \neg\Box\neg\alpha$

T3. Regole iterate di trasformazione degli operatori modali (Trr)

a) $\Box\Diamond\neg\alpha \vdash \neg\Diamond\Box\alpha$

b) $\neg\Box\Diamond\alpha \vdash \Diamond\Box\neg\alpha$

T4. Regola di possibilitazione (P)

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\Diamond\alpha \vdash \Diamond\beta}$$

T5. $\alpha \vdash \Box\Diamond\alpha$

T6. $\Diamond\Box\alpha \vdash \alpha$

Derivazione:

$\neg\alpha \vdash \Box\Diamond\neg\alpha$	T5
$\Diamond\Box\alpha \vdash \alpha$	per C

T7. Regola di necessitazione del conseguente (NC)

$$\frac{\Diamond\alpha \vdash \beta}{\alpha \vdash \Box\beta}$$

Derivazione:

$\Diamond\alpha \vdash \beta$	H
$\Box\Diamond\alpha \vdash \Box\beta$	N
$\alpha \vdash \Box\Diamond\alpha$	T5
$\alpha \vdash \Box\beta$	KS

T8. Formula Barcan 1 (BF1): $\forall x \Box \alpha \vdash \Box \forall x \alpha$

Derivazione:

$\forall x \Box \alpha \vdash \Box \alpha$	A, E$\forall$
$\Diamond \forall x \Box \alpha \vdash \Diamond \Box \alpha$	P
$\Diamond \forall x \Box \alpha \vdash \alpha$	per T6
$\Diamond \forall x \Box \alpha \vdash \forall x \alpha$	I$\forall$
$\forall x \Box \alpha \vdash \Box \forall x \alpha$	T7

T9. Formula Barcan 2 (BF2): $\Diamond \exists x \alpha \vdash \exists x \Diamond \alpha$

Derivazione:

$\forall x \Box \neg \alpha \vdash \Box \forall x \neg \alpha$	BF1
$\Diamond \exists x \alpha \vdash \exists x \Diamond \alpha$	per C

T10. $\Box\forall x\alpha \vdash \forall x\Box\alpha$

Derivazione:

$\forall x\alpha \vdash \alpha$	A, E$\forall$
$\Box\forall x\alpha \vdash \Box\alpha$	N
$\Box\forall x\alpha \vdash \forall x\Box\alpha$	I$\forall$

T11. $\exists x\Diamond\alpha \vdash \Diamond\exists x\alpha$

Derivazione:

$\Box\forall x\neg\alpha \vdash \forall x\Box\neg\alpha$	T10
$\exists x\Diamond\alpha \vdash \Diamond\exists x\alpha$	per C

T12. $\Diamond\forall x\alpha \vdash \forall x\Diamond\alpha$

Derivazione:

$\forall x\alpha \vdash \alpha$	A, E$\forall$
$\Diamond\forall x\alpha \vdash \Diamond\alpha$	N
$\Diamond\forall x\alpha \vdash \forall x\Diamond\alpha$	I$\forall$

T13. $\exists x \Box \alpha \vdash \Box \exists x \alpha$

Derivazione:

$\Diamond \forall x \neg \alpha \vdash \forall x \Diamond \neg \alpha$	T12
$\exists x \Box \alpha \vdash \Box \exists x \alpha$	per C

NB: È da notare che non valgono in generale $\forall x \Diamond \alpha \vdash \Diamond \forall x \alpha$ e $\Box \exists x \alpha \vdash \exists x \Box \alpha$. Inoltre non valgono le formule Barcan per i quantificatori puntati. In sintesi:

BF1	$\forall x \Box \alpha \vdash \Box \forall x \alpha$	valida in S5P
BF2	$\Diamond \exists x \alpha \vdash \exists x \Diamond \alpha$	valida in S5P
T10	$\Box \forall x \alpha \vdash \forall x \Box \alpha$	valida in KP
T11	$\exists x \Diamond \alpha \vdash \Diamond \exists x \alpha$	valida in KP
T12	$\Diamond \forall x \alpha \vdash \forall x \Diamond \alpha$	valida in KP
T13	$\exists x \Box \alpha \vdash \Box \exists x \alpha$	valida in KP
	$\forall x \Diamond \alpha \vdash \Diamond \forall x \alpha$	non valida
	$\Box \exists x \alpha \vdash \exists x \Box \alpha$	non valida
	$\forall x . \Box \alpha \vdash \Box \forall x . \alpha$	non valida
	$\Diamond \exists x . \alpha \vdash \exists x . \Diamond \alpha$	non valida

T14. $x=y \vdash \Box(x=y)$

Derivazione :

$\vdash x=x$	I
$\vdash \Box(x=x)$	N
$x=y \vdash \Box(x=y)$	IS

T15. $x\neq y \vdash \Box(x\neq y)$

Derivazione:

$\neg\Box(x=y) \vdash x\neq y$	da T14
$\Diamond(x\neq y) \vdash x\neq y$	Tr
$x\neq y \vdash \Box(x\neq y)$	T7

T16. $\exists x\alpha(x) \mid\!- \exists x\Diamond\alpha(x) \mid\!- \Diamond\exists x\alpha(x)$

Derivazione:

1. Parte: $\exists x\alpha(x) \mid\!- \exists x\Diamond\alpha(x)$

$\alpha(x) \mid\!- \Diamond\alpha(x)$ da AT

$\exists x\alpha(x) \mid\!- \exists x\Diamond\alpha(x)$ I∃, I∃

2. Parte: $\exists x\Diamond\alpha(x) \mid\!- \Diamond\exists x\alpha(x)$

$\exists x\Diamond\alpha(x) \mid\!- \Diamond\exists x\alpha(x)$ da T11

T17. $\Diamond\exists x(\alpha(x) \wedge \mathbf{PRE}\alpha(x)) \mid\!- \exists x\alpha(x)$

Derivazione:

$\Diamond\exists x(\alpha(x)\wedge \Diamond(\alpha(x) \wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge \neg Ex))) \mid\!- \exists x\Diamond(\alpha(x)$
$\wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge \neg Ex)))$ BF2

$\alpha(x) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge Ex)) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge \neg Ex)) \mid\!- \Box\alpha(x)$ NE

$\Diamond(\alpha(x) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge \neg Ex))) \mid\!- \Diamond\Box\alpha(x)$ P

$\Diamond(\alpha(x) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge \neg Ex))) \mid\!- \alpha(x)$ T6

$\exists x\Diamond(\alpha(x) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x)\wedge \neg Ex))) \mid\!- \exists x\alpha(x)$ I∃, I∃

$\exists x\Diamond(\alpha(x) \wedge \mathbf{PRE}\alpha(x)) \mid\!- \exists x\alpha(x)$ def. **PRE**

Semantica di PIES5

1. Struttura universale modale

$$F = <W, R, \mathcal{U}, \mathcal{E}>$$

$$\mathcal{U} = <U, \mathcal{P}>$$

$$F = <W, R, U, \ldots \overline{P}_i \ldots, \equiv, \approx, \mathcal{E})>$$

(A) W è un insieme di mondi possibili. I mondi si indicano attraverso le lettere u,v,w con eventuali indici.

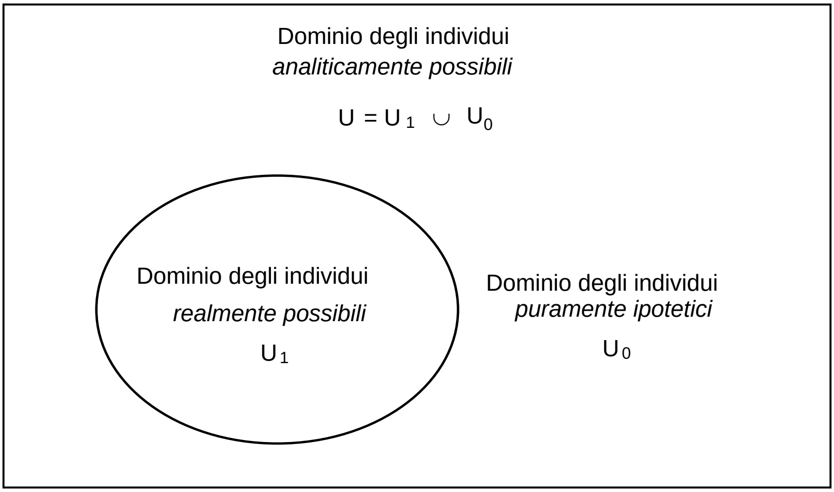
(B) $R = W \times W$ è una relazione universale tra i mondi di W.

(C) $\mathcal{U} = <U, \mathcal{P}>$, $\mathcal{P} = < \overline{P}_1 \ldots \overline{P}_n \ldots, \equiv, \approx >$

- U (il dominio oggettuale) è costituito da oggetti possibili. $\overline{x}$,$\overline{y}$, $\overline{z}$, ... sono elementi di U.

Per oggetto (ente) possibile si intende un oggetto individuale (= determinato rispetto a tutte le proprietà e relazioni) analiticamente possibile, i. e. un oggetto che soddisfa necessariamente il solo requisito della coerenza. In tal senso sono og-getti analiticamente possibili tutti gli oggetti individuali pensabili.

L'insieme degli individui analiticamente possibili è suddiviso, a sua volta, in due sottoinsiemi disgiunti: il sottoinsieme degli individui realmente possibili e il sottoinsieme degli individui puramente possibili (puramente pensabili o ipotetici). I primi sono gli individui attualizzati (i.e. gli individui dotati di esistenza) perlomeno in un mondo possibile, mentre i secondi sono gli individui non attualizzati (i.e. non dotati d'esistenza) in nessun mondo possibile.



- $\overline{P}_1 \ldots \overline{P}_n$ sono attributi definiti su U. Questi sono dati sia in intensione sia in estensione:

		1	$\overline{P}_i$ è l'esser qualcosa di qualcosa
$\overline{P}_i$ dato in intensione	=		
		n	$\overline{P}_i$ è l'essere in relazione di qualcosa con qualcosa ...
		1	$\overline{P}_i \subseteq U$, ovvero $\overline{P}_i \in \wp(U)$
$\overline{P}_i$ dato in estensione	=		
		n	$\overline{P}_i \subseteq U^n$, ovvero $\overline{P}_i \in \wp\left(U^n\right)$

- Distinzione tra = e ≈.

Ad =: x=y significa che l'individuo denominato da x e l'individuo denominato da y sono lo stesso individuo all'interno di un mondo (*identità*)

I(=) = ≡ = [I(=)] (insieme di classi di equivalenza che includono un unico elemento indotte dalla relazione ≡)

Ad ≈: x≈y significa che l'individuo denominato da x e l'individuo denominato da y sono varianti attributive dello stesso individuo (*p-identità* o *coincidenza* ontologica tra possibili) Data

Esempio: Socrate seduto ≈ Socrate in piedi

$I(\approx) = \overline{\approx} = [I(\approx)]$ (insieme di classi di equivalenza che includono tutti gli elementi tra di loro p-identici indotte dalla relazione $\overline{\approx}$)

NOTA : I due tipi di relazione sono connessi dal fatto che un individuo, essendo sempre identico a se stesso, coincide con se stesso in ogni mondo, per cui:

x=y implica x≈y.

- Analisi dei rapporti tra identità e p-identità

A_i = una delle classi di equivalenza indotte da $\approx$

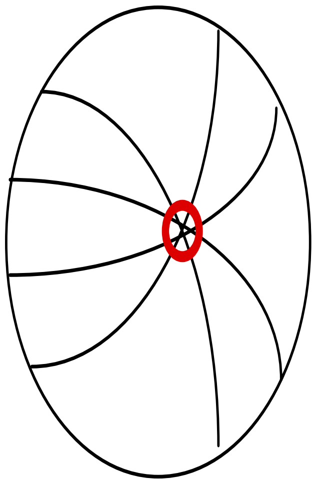
= elemento di $[I(\approx)]$

insieme di scelta s = $\{\overline{x} \,/\, \overline{x}$ $\in$ ad una e ad una sola classe di equivalenza $A_i\}$

$= \{\overline{x} \,/\, (\text{om } i)(\text{ex!}n)(\overline{x}_n \in A_i \wedge \overline{x} = \overline{x}_n\}$

Esempio:

Rappresentazione grafica di un insieme di scelta della classe [I(≈)]. Gli spicchi corrispondono alle classi A_i. Il cerchio rosso trattiene un individuo per ogni classe d'equivalenza. Questa è un insieme di scelta della classe [I(≈)].



(D) $\mathit{E} := W \mapsto \wp(U)$

E = intensione di E

E(u) = estensione di E in u

- L'estensione di E(u) soddisfa il requisito della *esistenza*:

$$(\text{om } u)(\emptyset \subset \mathit{E}(u) \subset U_1)$$

- L'estensione di E(u) soddisfa il requisito della *coerenza*:

$\mathit{E}(u) \subseteq s$ (per qualche insieme di scelta s della classe $[I(\approx)]$).

- L'estensione di E(u) soddisfa il requisito della *esaustività limitata*:

$$(\text{om } \overline{x} \text{ di } U_1)(\text{ex } u)(\overline{x} \in \mathit{E}(u))$$

NOTA 1: Il requisito di esaustività illimitata non può essere soddisfatto perché F è intesa quale struttura (ontologica) di mondi *realmente* possibili. Ora tutti i possibili sono istanziati - dunque esistenti – in qualche mondo. Tuttavia non tutti sono esistenti in qualche mondo realmente possibile.

NOTA 2: La differenza tra gli attributi normali e l'attributo d'esistenza riflette chiaramente la posizione kantiana, secondo la quale l'esistenza è una proprietà che *non* appartiene all'ordine del *sosein*; *non* è cioè un predicato *reale*, vale a dire un predicato designante una determinazione compresa *nell'essenza di un possibile che può non esistere*. Anche la distinzione tra possibilità *reale* e possibilità *analitica*, richiamata nel punto precedente, è strettamente connessa con la posizione kantiana.

Esempio:

$$U_1 = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3\} \neq \emptyset$$

$$U = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3\} \cup U_0$$

Si ipotizzi che gli individui x_1, x_2, x_3 siano tre individuazioni ultime di un oggetto possibile, per cui è vera la relazione di coincidenza $x_1 \approx x_2 \approx x_3$. Si ipotizzi lo stesso in relazione alle individuazioni y_1, y_2, y_3 e z_1, z_2, z_3. Si determinano, in questo modo, tre classi di equivalenza in relazione ai tre oggetti compossibili:

$$[\approx x_1] = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$[\approx y_1] = \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$[\approx z_1] = \{z_1, z_2, z_3\}$$

$$[\approx U_1] = \{[\approx x_1], [\approx y_1], [\approx z_1]\}$$

I possibili insiemi di selezione $S[\approx U_1]$ sono:

$\{x_1, y_1, z_1\}$	$\{x_2, y_1, z_1\}$	$\{x_3, y_1, z_1\}$
$\{x_1, y_1, z_2\}$	$\{x_2, y_1, z_2\}$	$\{x_3, y_1, z_2\}$
$\{x_1, y_1, z_3\}$	$\{x_2, y_1, z_3\}$	$\{x_3, y_1, z_3\}$
$\{x_1, y_2, z_1\}$	$\{x_2, y_2, z_1\}$	$\{x_3, y_2, z_1\}$
$\{x_1, y_2, z_2\}$	$\{x_2, y_2, z_2\}$	$\{x_3, y_2, z_2\}$
$\{x_1, y_2, z_3\}$	$\{x_2, y_2, z_3\}$	$\{x_3, y_2, z_3\}$
$\{x_1, y_3, z_1\}$	$\{x_2, y_3, z_1\}$	$\{x_3, y_3, z_1\}$
$\{x_1, y_3, z_2\}$	$\{x_2, y_3, z_2\}$	$\{x_3, y_3, z_2\}$
$\{x_1, y_3, z_3\}$	$\{x_2, y_3, z_3\}$	$\{x_3, y_3, z_3\}$

2. Modello universale

$$M = \langle F,I \rangle$$

ad I

Si tratta di funzione a due argomenti (segno, mondo) che associa:

a) oggetti possibili alle variabili individuali;

b) $\overline{P}_i$ al predicato P_i;

c) $\equiv$ al segno di identità =;

d) il concetto d'esistenza al predicato E.

In particolare:

ad a) $\overline{x}$,$\overline{y}$,$\overline{z}$, ... siano elementi di U. u,v,w, ... siano mondi appartenenti a W. Allora:

(om u)(I(x,u) = $\overline{x}$ = lo stesso elemento di U) (Rig1)

Cioè: le variabili sono interpretate quali *designatori rigidi* (esse sono il nome proprio del medesimo oggetto in tutti i mondi possibili). I(x,u) si abbrevia, per ovvii motivi, in I(x).

ad b) Anche i predicati sono intesi quali designatori rigidi. Cioè, per ogni predicato P, esiste un attributo $\overline{\mathrm{P}}$, dato sia in intensione sia in estensione, tale che:

$$(\mathrm{om}\ u)\ (I(P,u) = \overline{P})\ (\mathrm{Rig}\ 2)$$

ad c)

$I(=) = \equiv = \{<\overline{x}, \overline{y}> \mid \overline{x} \in U \text{ e } \overline{y} \in U \text{ e } \overline{x} \equiv \overline{y}\}$

$I(\approx) = \approx = \{<\overline{x}, \overline{y}> \mid \overline{x} \in U \text{ e } \overline{y} \in U \text{ e } \overline{x} \approx \overline{y}\}$

È da notare che anche la relazione di identità è un designatore rigido, alla stregua delle proprietà o relazioni di cui al punto precedente.

ad d) Il predicato d'esistenza è l'unico predicato inteso quale designatore non rigido. Come si è già detto, infatti, l'estensione di E(u) varia con il variare di u. Pertanto I(E,u) = *E*(u) può essere diversa da I(E,w) per u≠w.

3. Altre nozioni semantiche

Reinterpretazione

a) Reinterpretazione di I rispetto a x su $\overline{x}$

$I_x^{\overline{x}}$ $=_{def}$ interpretazione che differisce da I al massimo per

il valore associato a x e tale che, per ogni i, $I_x^{\overline{x}}(x,i) = \overline{x}$

b) Reinterpretazione di M rispetto a x su $\overline{x}$

M sia $<F, I>$. Allora, $M_x^{\overline{x}} =_{def} <F, I_x^{\overline{x}}>$.

Verità

Base: $\alpha \equiv P^n x_1 \dots x_n$

$M \models_u P^n x_1 \dots x_n \Leftrightarrow I(P^n)$ vale di $I(x_1,u) \dots I(x_n,u)$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n \in \overline{P}^n$$

$\alpha \equiv Ex$

$M \models_u Ex \Leftrightarrow I(E,u)$ vale di $I(x,u)$

$$\Leftrightarrow \overline{x} \in \mathit{E}(u)$$

Passo:

$\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$, $\alpha \equiv \beta \vee \gamma$, $\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$, $\alpha \equiv \neg\beta$

come usuale

$\alpha \equiv \forall x\beta$

$M \models \forall x\beta \Leftrightarrow (\text{om } \overline{x})(M^{\overline{x}}_{x} \models_u \beta)$

$\alpha \equiv \Box\beta$

$M \models_u \Box\beta \Leftrightarrow (\text{om } v)(M \models_v \beta)$

Sono riprese le usuali definizioni di conseguenza logica e di validità rispetto ai modelli basati su un frame.

4. Alcuni teoremi semantici elementari

Teorema di coincidenza: $M \overset{\alpha}{=} M' \Rightarrow (M \models_u \alpha \Leftrightarrow M' \models_u \alpha)$

Integrazione passo: $\alpha \equiv \Box\beta$

Hi: $M \models_v \beta \Leftrightarrow M' \models_v \beta$

Ma allora:

$M \models_u \Box\beta \Leftrightarrow$	$(\text{om } v)(M \models_v \beta)$	def. $\models$
	$\Leftrightarrow (\text{om } v)(M' \models_v \beta)$	Hi
	$\Leftrightarrow M' \models_u \Box\beta$	def. $\models$

Teorema di conversione

$$\text{Leg } \alpha^y_x \Rightarrow (M^{M(y)}_x \models_u \alpha \Leftrightarrow M \models_u \alpha^y_x)$$

Dimostrazione integrativa come sopra.

Corollari semantici

Dal teorema di conversione segue la validità di :

1) $\Box\alpha(x) \Vdash \exists x\Box\alpha(x)$

2) $\forall x\Box\alpha(x) \Vdash \Box\alpha(x)$

ad 1): H: $M \models_u \Box\alpha(x)$ Dem: $M \models_u \exists x\Box\alpha(x)$

(om v)($M \models_v \alpha(x)$)	da H
$M^{M(x)}_{x} \models_v \alpha(x) \Leftrightarrow M \models_v \alpha(x)$	da T. Conv.
(om v)($M^{M(x)}_{x} \models_v \alpha(x)$)	per equival.
$M^{M(x)}_{x} \models_u \Box\alpha(x)$	def. $\models$
(ex $\bar{x}$)($M^{\bar{x}}_{x} \models_u \Box\alpha(x)$	Iex
$M \models_u \exists x\Box\alpha(x))$	def. $\models$

ad 2): H: $M \models_u \forall x \Box \alpha(x)$ Dem: $M \models_u \Box \alpha(x)$

$(\text{om } \bar{x})(M^{\bar{x}}_{x} \models_u \Box \alpha(x))$	da H
$(\text{om } \bar{x})(\text{om } v)(M^{\bar{x}}_{x} \models_v \alpha(x))$	def. $\models$
$(\text{om } v)(M^{M(x)}_{x} \models_v \alpha(x))$	Eom
$(\text{om } v)(M \models_v \alpha(x))$	per T. Conv.
$M \models_u \Box \alpha(x)$	def. $\models$

5. Teorema di correttezza

Occorre dimostrare la correttezza di :

1. Simmetria di $\approx$: $x \approx y \vdash y \approx x$

2. Transitività di $\approx$: $x \approx y \wedge y \approx z \vdash x \approx z$

3. Regola Tr=$\approx$: $x = y \vdash x \approx y$

4. Regola Tr$\approx$=: $Ex \wedge Ey \wedge x \approx y \vdash x = y$

5.Regole NE e NI

.

ad 1-4

1. Simmetria di $\approx$: $x \approx y \ \vdash y \approx x$

2. Transitività di $\approx$: $x \approx y \wedge y \approx z \vdash x \approx z$

È ovvia la giustificazione delle proprietà di simmetria e di transitività.

3. Regola Tr=≈: $x = y \ \vdash x \approx y$

La regola Tr=≈ è giustificata dal fatto che la relazione di identità è una relazione più forte di quella di coincidenza.

4. Regola Tr≈=: $Ex \wedge Ey \wedge x \approx y \ \vdash x = y$

La regola Tr≈= trova, al contrario, la sua giustificazione nel fatto che se x ed y sono esistenti coincidenti, allora, in forza della condizione di coerenza di E non possono essere che identici.

ad NE (dimostrazione semplificata)

H: $M \models_u \alpha$, E non occorre in α Dem: $M \models_u \Box\alpha$

La dimostrazione è induttiva.

Base: $\alpha \equiv Px$

(om x)(om u, v)(I(x,u) = I(x,v))	(Rig1)
(om P)(om u, v)(I(P,u) = I(P,v))	(Rig2)
$M \models_u Px$	H
$I(x,u) \in I(P,u)$	def. $\models$
$I(x,v) \in I(P,v)$	per sost.
(om v)($I(x,v) \in I(P,v)$)	Iom
(om v)($M \models_v Px$)	def. $\models$
$M \models_u \Box Px$	def. $\models$

Passo: $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$

$M \models_u \beta \wedge \gamma$	H
$M \models_u \beta$ et $M \models_u \gamma$	def. $\models$
$M \models_u \Box\beta$ et $M \models_u \Box\gamma$	Hi
$M \models_u \Box\beta \wedge \Box\gamma$	def. $\models$
$M \models_u \Box(\beta \wedge \gamma)$	per $E\Box\wedge$

Passo: $\alpha \equiv \neg\beta$

$M \models \neg\beta$	H
$M \not\models_u \beta$	def. $\models$
$(\text{om } v)(M \not\models_v \beta)$	per Hi
$(\text{om } v)(M \models_v \neg\beta)$	def. $\models$
$M \models_u \Box\neg\beta$	def. $\models$

Sviluppo di Hi: $M \models_v \beta \Rightarrow M \models_v \Box\beta$

$M \models_v \beta \Rightarrow M \models_v \Box\beta$	Hi
$M \models_v \beta \Rightarrow (\text{om } u)(M \models_u \beta)$	per def. $\models$
$M \models_v \beta \Rightarrow M \models_u \beta$	per Eom
$M \not\models_u \beta \Rightarrow M \not\models_v \beta$	c
$M \not\models_u \beta \Rightarrow (\text{om } v)(M \not\models_v \beta)$	per Iom

I casi del passo in cui sono in gioco i quantificatori e l'operatore di necessitazione non presentano difficoltà di principio e possono pertanto essere dimostrati in modo analogo ai precedenti.

ad NI:

Dem: $M \models_u \Box \exists x Ex$

$\emptyset \subset I(E,u) \subset U_1$	Cond. es.
$I(E,u) \cap U_1 \neq \emptyset$	def. $\subset$
$(ex\ \overline{x})(\overline{x} \in U_1 \text{ et } \overline{x} \in I(E,u))$	def. $\cap$
$(ex\ \overline{x})(\overline{x} \in I(E,u))$	Eet
$M \models_u \exists x Ex$	def. $\models$
$(om\ u)(M \models_u \exists x Ex)$	Iom
$M \models_u \Box \exists x Ex$	def. $\models$

6. Corollari della correttezza

Teorema 18: $\alpha(x) \mid\!\nvdash \Diamond(\alpha(x) \wedge Ex)$

Teorema 19: $\exists x\alpha(x) \mid\!\nvdash \Diamond\exists x(\alpha(x) \wedge Ex)$

Teorema 20: $\exists x\Diamond\alpha(x) \mid\!\nvdash \Diamond\exists x(\alpha(x) \wedge Ex)$

La dimostrazione segue dalla correttezza di PIES5 e dalla condizione di esaustività limitata del predicato d'esistenza.

LOGICA DELL'ESSENZA INDIVIDUALE E IL SISTEMA PIES5

1. Definizione di essenza individuale

Def. 1 di proprietà o relazione essenziale:

$$\nabla\alpha(a) \leftrightarrow \forall x \Box (x \approx a \to \alpha(x))$$

Corollario: $\vdash \nabla(a \approx a)$, infatti $\forall x \Box (x \approx a \text{ –> } x \approx a)$

Def. 2 di proprietà o relazione accidentale:

$$\Delta\alpha(a) \leftrightarrow \alpha(a) \wedge \neg\nabla\alpha(a)$$

TEOREMA1: $\vdash \nabla\alpha(a) \to \Box\alpha(a)$

Derivazione:

$\nabla\alpha(a) \vdash \forall x \Box (x \approx a \to \alpha(x))$	def. ∇
$\nabla\alpha(a) \vdash \Box(a \approx a \to \alpha(a))$	$E\forall\Box$
$\nabla\alpha(a) \vdash \Box(a \approx a) \to \Box\alpha(a)$	Distr$\Box$
$\vdash \Box(a \approx a)$	I$\approx$
$\nabla\alpha(a) \vdash \Box\alpha(a)$	MP

TEOREMA2: $\vdash \nabla\alpha(a) \rightarrow \Box\nabla\alpha(a)$

Derivazione:

$\nabla\alpha(a) \vdash \rightarrow \forall x\Box(x \approx a \rightarrow \alpha(x))$	def. $\nabla\alpha(a)$
$\nabla\alpha(a) \vdash \Box(x \approx a \rightarrow \alpha(x))$	E$\forall$
$\nabla\alpha(a) \vdash \Box\Box(x \approx a \rightarrow \alpha(x))$	A4
$\nabla\alpha(a) \vdash \forall x\Box\Box(x \approx a \rightarrow \alpha(x))$	I$\forall$
$\nabla\alpha(a) \vdash \Box\forall x\Box(x \approx a \rightarrow \alpha(x))$	T8

(BF1)

TEOREMA 3: $\nabla\alpha(a)\ x\approx a \mid\!- \nabla\alpha(x)$ (Regola S≈)

Derivazione:

$\nabla\alpha(a) \mid\!- \forall x\Box(x\approx a \to \alpha(x))$	def. $\nabla\alpha(a)$
$\nabla\alpha(a) \mid\!- \Box(y\approx a \to \alpha(y))$	E$\forall$
$\nabla\alpha(a) \mid\!- y\approx a \to \alpha(y)$	AT
$x\approx y\ \ x\approx a \mid\!- y\approx a$	I≈
$\nabla\alpha(a)\ \ x\approx y, x\approx a \mid\!- \alpha(y)$	MP
$\nabla\alpha(a)\ x\approx a \mid\!- x\approx y \to \alpha(y)$	I$\to$
$\Box\nabla\alpha(a)\ \Box(x\approx a) \mid\!- \Box(x\approx y \to \alpha(y))$	N
$\nabla\alpha(a) \mid\!- \Box\nabla\alpha(a)$	T2
$x\approx a \mid\!- \Box(x\approx a)$	NE
$\nabla\alpha(a)\ x\approx a \mid\!- \Box(x\approx y \to \alpha(y))$	KS
$\nabla\alpha(a)\ x\approx a \mid\!- \forall y\Box(x\approx y \to \alpha(y))$	I$\forall$
$\nabla\alpha(a)\ x\approx a \mid\!- \nabla\alpha(x)$	def. $\nabla\alpha(x)$

TEOREMA 4: $\nabla\alpha(a)\ x\approx a \mid\!- \alpha(x)$

Derivazione immediata da T3.

Corollario di T4: $\alpha(a)\ x\approx a\ \neg\alpha(x) \mid\!- \Delta\alpha(a)$

Derivazione immediata da definizione di Δ.

TEOREMA 5: $\forall x\square\alpha(x) \mid\!- \forall x\nabla\alpha(x)$

Derivazione:

$\forall x\square\alpha(x) \mid\!- \square\alpha(x)$	E∀
$\alpha(x) \mid\!- x\approx a \rightarrow \alpha(x)$	PI
$\square\alpha(x) \mid\!- \square(x\approx a \rightarrow \alpha(x))$	N
$\forall x\square\alpha(x) \mid\!- \forall x\square(x\approx a \rightarrow \alpha(x))$	KS, I∀
$\forall x\square\alpha(x) \mid\!- \forall x\nabla\alpha(a)$	def. ∇, I∀

TEOREMA 6: $\forall x\square(\alpha(x) \rightarrow \beta\square \mid\!- \forall x\square(\nabla\alpha(x) \rightarrow \nabla\beta\square$

Derivazione immediata.

2. Relazione tra essenza individuale ed esistenza

TEOREMA 7: $Ea \wedge x{\approx}a \vdash Ex \leftrightarrow x{=}a$

$Ea \wedge x{\approx}a \;\; Ex \vdash x{=}a$	E≈
$Ea \wedge x{\approx}a \vdash Ex \rightarrow x{=}a$	I→
$Ea \wedge x{\approx}a \;\; x{=}a \vdash Ex$	da S=
$Ea \wedge x{\approx}a \vdash x{=}a \rightarrow Ex$	I→
$Ea \wedge x{\approx}a \vdash Ex \leftrightarrow x{=}a$	I↔

Corollario 1 di T7: $\vdash Ea \wedge x{\approx}a \wedge Ex \leftrightarrow Ea \wedge x{\approx}a \wedge x{=}a$

Def. 3: $x{\approx}{:}a := x{\approx}a \wedge x{\neq}a$ (x è una variante propria di a)

TEOREMA 8: $Ea \;\; x{\approx}{:}a \vdash \neg Ex$

Immediato per definizione di ≈: e T7.

TEOREMA 9: Ea ∃x(x≈:a) |– ¬∇Ea

∇Ex |– Ex	T1
¬Ex |– ¬∇Ex	C
Ea x≈:a |– ¬Ex	T8
Ea x≈:a |– ¬∇Ex	KS
¬∇Ex x≈a |– ¬∇Ea	T3
Ea x≈:a |– x≈a	def. ≈:
Ea x≈:a |– ¬∇Ea	KS
Ea ∃x(x≈:a) |– ¬∇Ea	∃I

COROLLARIO di T9: Ea ∃x(x≈:a) |– ΔEa

TEOREMA 10: ∃x(x≈:a) |– ¬∇Ea

Ea ∃x(x≈:a) |– ¬∇Ea	T9
∇Ea |– Ea	T1
¬Ea |– ¬∇Ea	C
∃x(x≈:a) |– ¬∇Ea	E

TEOREMA 11: $\nabla Ea \;\; x \approx a \vdash x = a$

$\nabla Ea \;\; x \approx a \vdash \nabla Ex$	da T3
$\nabla Ea \;\; \nabla Ex \vdash Ea \wedge Ex$	da T1
$\nabla Ea \;\; x \approx a \vdash Ea \wedge Ex$	KS
$\nabla Ea \;\; x \approx a \vdash Ea \wedge Ex \wedge x \approx a$	per I$\wedge$
$\nabla Ea \;\; x \approx a \vdash x = a$	per def. $\approx$

Il T11 è il PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE relativo all'esistenza per essenza: ciò che esiste per essenza è unico nel suo genere, perché in relazione ad un ente necessario non è possibile indicare individui coincidenti: posto che l'essenza possiede esistenza necessaria, si deriva quindi l'unicità dell'essenza. Inoltre, dal momento che individui coincidenti sono pensati come individuazioni ultime dello stesso individuo permanente e che individuazioni di questo tipo sono i diversi stati del divenire di un ente, un ente che possiede l'esistenza per essenza non può essere diveniente.

TEOREMA 12: $\nabla Ea\ \ \alpha(a) \vdash \nabla\alpha(a)$

$\nabla Ea\ \ x\approx a \vdash x=a$	T11
$\alpha(a)\ \ x=a \vdash \alpha(x)$	da S=
$\nabla Ea\ \ \alpha(a)\ \ x\approx a \vdash \alpha(x)$	KS
$\nabla Ea\ \ \alpha(a) \vdash x\approx a \rightarrow \alpha(x)$	I$\rightarrow$
$\nabla Ea\ \ \alpha(a) \vdash \forall x(x\approx a \rightarrow \alpha(x))$	I$\forall$
$\nabla Ea\ \ \alpha(a) \vdash \nabla\alpha(a)$	def. ∇I$\forall$

Il T12 è il SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE relativo all’esistenza per essenza: ciò che esiste per essenza è per essenza tutto ciò che è; ogni determinazione di ciò che esiste per essenza è essenziale. Si è quindi esplicitato il fatto che l'ente che esiste per essenza è indiveniente: il divenire implica il venir meno di una determinazione dell'individuo che diviene; se non è possibile il venir meno di nessuna determinazione, non è possibile il divenire. Come corollario si ottiene che, se un individuo possiede una determinazione accidentale, non può possedere l'esistenza per essenza.

3. Discussione della critica kantiana all’esistenza di un Ente Necessario.

1.Obiezione basata sulla definizione di predicato reale come predicato rigido.

Sia data la seguente definizione do predicato reale:

$$\mathbf{PR}(\alpha)=:\ \forall x\Box(\alpha(x) \rightarrow \Box\alpha(x))$$

Ora, l’Ente Necessario è definito dagli assiomi: $\Diamond Ex$, $Ex \rightarrow \Box Ex$, ove il secondo assioma coincide con l’affermazione che il predicato d’esistenza è rigido. Al contrario il predicato d’esistenza E non può essere rigido, perché non è un predicato reale.

2. Soluzione del problema precedente

La soluzione consiste nel fatto che la realtà di un predicato non consiste nella sua rigidità, anche se tutti i predicati reali sono rigidi. Sono, infatti, possibili oggetti caratterizzati rigidamente da qualche proprietà non reale. Dunque: predicato reale $\neq$ predicato rigido. Naturalmente, questa soluzione presuppone una definizione alternativa di predicato reale. Predicato reale è un predicato α tale che l'appartenenza di α ad un oggetto (possibile) non costituisce una ragione sufficiente per ricavare l'esistenza (0 non esistenza) del medesimo oggetto. In altri termini, il predicato α è reale se e solo se $\alpha(x)$ non implica Ex o $\neg$Ex. Formalmente:

$$\mathbf{PRE}(\alpha) =: \Diamond(\alpha(x) \wedge Ex) \wedge \Diamond(\alpha(x) \wedge \neg Ex)$$

Chiaramente, allora, il predicato $Ex \rightarrow \Box Ex$ è un **PRE**, dal momento che $\Diamond(Ex \rightarrow \Box Ex \wedge Ex) \wedge \Diamond(Ex \rightarrow \Box Ex \wedge \neg Ex)$.

3.Replica alla soluzione e discussione relativa

Si conviene circa la distinzione tra realtà e rigidità. Tuttavia si insiste sul fatto che E non è un predicato rigido ($\neg$**PR**(E)) e si argomenta come segue:

$\neg\mathbf{PR}(E) \vdash \neg\Box(Ex \rightarrow \Box E(x)$	def.**PR**
$\neg\mathbf{PR}(E) \vdash \neg\Box\neg(Ex \wedge \neg\Box Ex)$	Tr$\rightarrow\wedge$
$Ex \wedge \neg\Box Ex \vdash Ex \wedge \neg\Box Ex$	A
$Ex \wedge \neg\Box Ex \vdash \neg\Box Ex$	E$\wedge$
$\Box Ex \vdash \neg(Ex \wedge \neg\Box Ex)$	C
$\Box\Box Ex \vdash \Box\neg(Ex \wedge \neg\Box Ex)$	N
$\Box Ex \vdash \Box\Box Ex$	A4
$\Box Ex \vdash \Box\neg(Ex \wedge \neg\Box Ex)$	KS
$\neg\Box\neg(Ex \wedge \neg\Box Ex) \vdash \neg\Box Ex$	C
$\neg\mathbf{PR}(E) \vdash \neg\Box Ex$	KS
$\neg\mathbf{PR}(E) \vdash \forall\Box\neg\Box Ex$	KS

Ebbene, questa argomentazione è errata, in quanto la negazione di **PR**(E) è una proposizione esistenziale e non una proposizione aperta come risulta dalla prima riga dell'argomentazione.

4. Ulteriore obiezione kantiana

Kant prende le mosse dalla accezione forte - leibniziana - del PRS: esiste una ragione sufficiente di ogni stato di cose, sia degli stati di cose contingenti sia di quelli necessari. L'esistenza di un fondamento aletico incondizionata delle cose è uno stato di cose necessario, del quale va reso ragione in quanto, per l'appunto, stato di cose necessario. Ora per Kant uno stato di cose necessario è spiegabile solo dal fatto di concernere un ente la cui esistenza è implicata dalla sua essenza. Dunque:

$$\Box Ex \rightarrow \exists F(Fx \wedge \Box(Fx \rightarrow Ex))$$

Per Kant, però, una proposizione come $\Box(Fx \rightarrow Ex)$ è mal formata ed appunto perciò insensata. La proposizione, infatti, dichiara l'appartenenza essenziale del predicato d'esistenza alla proprietà F. Dal momento, però, che F è un predicato reale in esso non può essere incluso il predicato d'esistenza.

In realtà l'obiezione regge sull'identificazione di predicato reale (predicato definiente l'essenza di un possibile che può non esistere) e predicato essenziale (predicato definiente l'essenza di un possibile, che potrebbe anche essere un esistente che non può non esistere). Infatti, anche se l'esistenza di un essere necessario x implica che $\exists F(Fx \wedge \Box(Fx \rightarrow Ex))$ e in tal caso F non può sicuramente essere inteso quale predicato reale, non esiste ragione cogente per ritenere che l'essenza di un oggetto sia necessariamente costituita di soli predicati reali. Basti solo l'esempio del predicato A(x), esprimente nel linguaggio di Galvan [1998] sopra richiamato l'idea di potenza produttiva e così definito:

$$\alpha(x) =: \exists y(Ey \wedge xRy)$$

Plausibilmente vale $\Box(\alpha(x) \rightarrow Ex)$ il che presuppone che l'implicazione $\Box(\alpha(x) \rightarrow Ex$ non sia malformata, il che, a sua volta, è giustificato dal fatto che $\alpha(x)$, pur esprimendo l'essenza di x, non è un predicato reale.